

Examen Calculus II - 28 maart 2024

1a (0.5 punten)

Een magneetveld $B(x, y, z)$ is altijd solenoïdaal. Dit betekent dat er een veld A bestaat zodat B gelijk is aan:

- a) $\nabla \cdot A$
- b) ∇A
- c) $\nabla \times A$
- d) $B \times A$

1b (1 punt)

1. Is de curve $\mathcal{C}$, gedefinieerd als de kromme $r(s) = \cos(s)\mathbf{i} + \sin(s)\mathbf{j}$ doorlopen met $s \in [0, 2\pi]$, geparametriseerd volgens haar booglengte? Waarom wel / niet?
2. Geef de lijnintegraal over $\mathcal{C}$ van het vectorveld $F(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ waarbij f een voldoende vaak afleidbare scalaire functie is.

1c (0.5 punten)

Het oppervlak S wordt gegeven door het volgende stel vergelijkingen:

$$\begin{cases} x(\theta, \varphi) = a \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y(\theta, \varphi) = b \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z(\theta, \varphi) = c \cos(\varphi) \end{cases}$$

waarbij $a, b, c \in \mathbb{R}_0^+$ en $\theta \in [0, 2\pi]$ en $\varphi \in [0, \pi]$ (zoals gewoonlijk bij bolcoördinaten dus).
Identificeer S en geef de Cartesiaanse vergelijking ervan.

1d (2 punten)

Het begrensde oppervlak D wordt gevormd door de rechten $y = x$, $y = 5x$, $y = \frac{1}{x}$ en $y = \frac{3}{x}$.

1. Vul de verandering van variabelen aan om D om te vormen tot een rechthoek:

$$\begin{cases} u(x, y) = \frac{y}{x}, u \in [1, 5] \\ v(x, y) = \dots, v \in [\dots, \dots] \end{cases}$$

2. Wat zou het oppervlakte-element dA zijn in een dubbele integraal?
Schrijf dit in termen van du en dv .

2 (4 punten)

1. Alice en Bob gaan wandelen over een landschap¹ wiens hoogte op het punt (x, y) gegeven wordt door $z(x, y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$. Ze starten in het punt $(2, 0)$ en lopen naar het punt $(-2, 0)$. Alice loopt via het pad

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(\pi t) \\ y(t) = 2 \sin(\pi t) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

en Bob loopt via

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 4t \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Wie moet het langste lopen? Bereken beide lengtes.

2. Hun vriendin Caroline loopt via het pad

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos(\pi t) \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

Wandelt ze minder lang dan Alice of Bob?

3 (4 punten)

Bereken $\iiint_E 4x|y| \, dV$ waarbij E het volume begrensd door $z = 2x^2 + 2y^2 - 7$ en $z = 1$ is.

4 (4 punten)

Bereken de circulatie van het vectorveld $\mathbf{a} = \nabla \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ rond een curve $\mathcal{C}$, waarbij die curve ergens boven het xy -vlak ligt en in tegenwijzerzin rond de positieve z -as draait. Doe dit als volgt:

1. Bereken de gradiënt van $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
2. Bereken de circulatie als de kromme één keer doorlopen wordt.
3. Bereken de circulatie als de kromme n keer doorlopen wordt (met $n \in \mathbb{N}_0$).

5 (4 punten)

Een begrensde cilinder wordt gegeven door $x^2 + y^2 = 1$, met $0 \leq z \leq 2$. Het vectorveld $\mathbf{F}$ wordt gegeven door

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x^3}{3} + e^{yz}, \frac{y^3}{3} \sin^2(xz), z - x - y \right)$$

Bereken de flux van dit veld doorheen het deel van die cilinder dat binnen de bol gegeven door $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 4$.

¹NB: op het examen zelf werd het woord "berg" gebruikt maar dat is een dikke scam, want het oppervlak in kwestie was gewoon een soort dal