Examen DVGL 16/01/2017

Alexander Geldhof

16 januari 2017

1 Populatiemodel

Het logistieke model kan uitgebreid worden met een populatie zieke prooien. In totaal zijn er dus drie populaties, waarvan de evolutie beschreven wordt door het volgende stelsel:

$$\begin{aligned} x' &= -ax + bxy - \beta xz \\ y' &= cy - bxy - \alpha yz + \gamma z \\ z' &= cz - \beta xz + \alpha yz - \gamma z \end{aligned}$$

1.1 Deelvraag 1

Verklaar de betekenis van de nieuwe factoren $\alpha yz, \beta xz$ en γz. Welke aannames moet je hiervoor maken?

1.2 Deelvraag 2

Voor deze vraag en de volgende mag je aannemen dat alle constantes gelijk zijn aan 1, behalve $\alpha = 0.5$.
Er is juist één kritiek punt in het eerste octant. Bepaal het.

1.3 Deelvraag 3

Lineariseer het stelsel rond dit kritiek punt en bepaal aard en stabiliteit.
(Hint: de eigenwaarden zijn niet op zicht te bepalen)

2 Inhomogene ordereductie

Beschouw de differentiaalvergelijking

$$y^{''} + P(x)y^{'} + Q(x)y = F(x)$$

2.1 Deelvraag 1

Als je weet dat een functie y_1 een oplossing is van de homogene differentiaalvergelijking, bepaal dan aan de hand van deze oplossing via ordereductie een oplossing van de inhomogene differentiaalvergelijking.

2.2 Deelvraag 2

Geef nu de algemene oplossing van het stelsel.

2.3 Deelvraag 3

Er wordt gevraagd een concrete vergelijking (waar dus P(x), Q(x) en F(x) gegeven zijn) op te lossen via de formules die gegeven werden. Uw nederige dienaar vergat echter wat deze functies precies waren, maar kan u wel vertellen dat deze oefening niet veel inhoudt indien je deelvraag 1 en 2 correct hebt opgelost.

3 Chemische reactor

Een chemische reactor wordt beschreven door de volgende differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial U}{\partial t} = D\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \lambda U$$

met homogene Dirichletrandvoorwaarden $U(0,t) = U(L,t) = 0$.

3.1 Deelvraag 1

Gegeven de beginconditie $U(x,0) = \cos(\frac{\pi x}{2L})$. Bereken λ zodat deze oplossing stabiel is in de tijd.

3.2 Deelvraag 2

Neem nu λ zoals berekend in deelvraag 1. Gegeven de beginconditie $U(x,0) = \cos(\frac{3\pi x}{2L})$. Bepaal de tijdsevolutie: zal het proces toenemen, afnemen of constant blijven?

4 Elektromagnetische golfvergelijking

De volgende vergelijkingen zijn gegeven:

$$\vec{B} = \nabla \times (\hat{z}\Psi)$$
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \nabla \times \vec{B}$$
$$\vec{E} = \frac{\partial(\hat{z}\Psi)}{\partial t}$$

Ga er van uit dat alle functies z-onafhankelijk zijn. $\hat{z}$ is de eenheidsvector in de z-richting.

4.1 Deelvraag 1

Aan welke partiële differentiaavergelijking voldoet $\Psi(x, y, t)$?

4.2 Deelvraag 2

Voor deze en de volgende deelvraag mag je aannemen dat $\Psi(x, t)$ y-onafhankelijk is.

Is de vorm van de differentiaalvergelijking hyperbolisch, elliptisch of parabolisch? Waarom?

4.3 Deelvraag 3

Los op (ongeacht van beginvoorwaarden) met randvoorwaarden $\Psi(0, t) = \Psi(1, t) = 0$ via splitsing van veranderlijken.

5 Antwoorden

Correctheid van volgende antwoorden is niet gegarandeerd.

5.1 Vraag 1

1 αyz: Gezonde dieren kunnen besmet worden; dit hangt af van zowel de grootte van de zieke als gezonde populaties.
βxz: Zieke prooien kunnen opgegeten worden, maar dit doodt tevens de roofdierpopulatie.
γz: Zieke prooien kunnen genezen.

2 Het punt (1,2,1).

3 De eigenwaarden zijn niet op het zicht te bepalen, en werden gegeven door prof. van Assche. Deze zijn $\lambda_1 \approx 0.7$, $\lambda_2 \approx -0.2 + i$ en $\lambda_3 \approx -0.2 - i$. Het snode plan hierachter was uiteraard dat je de aard niet letterlijk uit je cursus kon aflezen en op het moment zelf moest beargumenteren.
Het kritiek punt is onstabiel, maar kan een stabiele spiraalbeweging maken in het vlak van de twee laatste eigenvectoren.

5.2 Vraag 2

1 Gebeurt analoog aan de ordereductie voor het bepalen van een tweede homogene vergelijking. Hier dient wel gebruik gemaakt te worden van een passende integrerende factor.

2 Gebruik de oplossing van de vorige oefening en de tweede homogene oplossing bekomen via ordereductie uit de cursus.

3 /

5.3 Vraag 3

1 $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ en $U = \cos(\frac{\pi x}{2L})$ dus $\lambda = D\frac{\pi^2}{4L^2}$.

2 Uiteindelijk zou je moeten bekomen dat alle coefficienten voor de eigenfuncties nul zijn buiten die van de tweede eigenfunctie, die 1 is. U is dus gewoon gelijk aan de tweede eigenfunctie, en deze is dalend in de tijd.

5.4 Vraag 4

1

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}$$

2 Eigenwaarden zijn 1 en -1 dus parabolisch.

3 De eigenfuncties van zowel t als x zijn trigonometrisch.