Examen diff

21 januari 2020

Vraag 1 (mondeling)

Gegeven is een tweede orde differentiaalvergelijking voor y:

$$(x-1)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0,$$

waarvan een oplossing $y(x) = e^x$ gegeven is.

2.1 Deelvraag 1

Vind via ordereductie een tweede lineair onafhankelijke oplossing van de differentiaalvergelijking.

(1).png

deelvraag 2

Wat is het punt $x = 1$ voor deze diffvergelijking?
(let op: $x = 1$ is hier wel een regulier singulier punt. De definitie in de cursus (5.4) is alleen toepasbaar op $x = 0$. Als je dus wilt nagaan of een punt $x = a$ een regulier singulier punt is moet je nagaan of $p(x) = (x-a)P(x)$ en $q(x) = (x-a)^2Q(x)$ analytisch zijn in a)

deelvraag 3

Hoe komt het dat de gevonden oplossingen geen singulariteit hebben in $x = 1$?

Vraag 2 (mondeling)

Beschouw volgend beginvoorwaarde probleem:

$$y'(x) = x + y \qquad y(0) = 1$$

1. Geef de eerste 5 Picard-iteraties y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 van deze vergelijking.
2. Los nu het probleem analytisch op. Welke methode gebruik je? Sluit je oplossing aan bij de eerder gevoden Picard-iteraties?

Schriftelijk gedeelte

3 Vraag 3

Gebruik makende van de stelling over Fouriertransformaties en het convolutieproduct, bereken de Fouriertransformatie van volgende functie:

$$I(x) = \int_0^{1/2} e^{-(x-t)^2} dt$$

4 Vraag 4

Gegeven zijn de volgende differentiaalvergelijkingen:

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x + v_x &= 0 \\ v_t + 2v_x + u_x &= 0. \end{aligned}$$

Hierbij stellen subscripts partiële afgeleiden voor. Voer de volgende stappen uit:

1. Leid de partiële differentiaalvergelijkingen af waar $F = u+v$ en $G = u-v$ aan voldoen.

2. Neem aan dat ze een golfachtige oplossing hebben: $F = f(x - \alpha t)$ en $G = g(x - \beta t)$.

3. Zoek α en β zodat aan de vergelijkingen voldaan is.

4. Gegeven de beginvoorwaarden $F(x, 0) = \sin(x)$, $G(x, 0) = \cos(x)$, vind een oplossing voor F en G.

5. Haal uit deze oplossingen voor F en G uitdrukkingen voor u en v.