Examen Diff

Persoon X

15 Januari 2019 Voormiddag

1 Vraag 1 (mondeling)

Gegeven de 2 volgende stelsels:

$$\begin{cases} x'(x,y) = y + x(x^2+y^2) \\ y'(x,y) = -x + y(x^2+y^2) \end{cases} \tag{1}$$

en

$$\begin{cases} x'(x,y) = y - x(x^2+y^2) \\ y'(x,y) = -x - y(x^2+y^2) \end{cases} \tag{2}$$

- Lineariseer deze stelsels en bepaal de aard van het punt (0,0).
- Doe een transformatie naar r met $r^2 = x^2 + y^2$ en toon aan dat $r' < 0$ en dat $\lim_{t\to+\infty} r(t) = 0$ voor stelsel (2). Wat kan je zeggen over het punt 0.
- Voor stelsel (1), neem $r(0) = r_0 > 0$. Toon aan dat de afstand oneindig wordt voor $t \to \frac{1}{2r_0^2}$.

2 Vraag 2(mondeling)

2 zouten vaten zijn aan elkaar aangesloten. In het eerste vat komt 1.5 liter/min bij en 100 gram/liter zout. In het tweede vat komt 1 liter/min bij en 300 gram/liter zout. De vaten zijn verbonden en er gaat 3 liter/min van vat 1 naar vat 2. Omgekeerd gaat er van vat 2 naar vat 2 1.5 liter/min. Er zal ook 2.5 liter/min van het tweede vat weggaan.

- Stel het gepaste stelsel op voor dit probleem en geef gepaste beginvoorwaarden.
- Zoek het evenwichtspunt van deze vergelijking.
- Los het stelsel op.

3 Vraag 3 (schriftelijk)

Gegeven volgende partiële differentiaalvergelijking:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D\frac{\partial^2 C}{\partial^2 x} + \lambda C \tag{3}$$

met volgende randvoorwaarden:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial C}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \\ C(x = L, t) = 0 \end{cases}$$

en volgende beginvoorwaarden:

$$C(x, t = 0) = \cos\frac{\pi x}{2L}$$

- Zoek de waarden voor λ waarvoor dit een stabiele oplossing is (constant in de tijd).
- Wanneer dezelfde λ gebruikt wordt maar nu volgende beginvoorwaarde:

  $$C(x, t = 0) = \cos\frac{3\pi x}{2L} \tag{4}$$

  Is de consentratie hier ook stabiel, stijgend of dalend?

4 Vraag 4 (schriftelijk)

Herinner de wet van Faraday in eenheden waar μ_0 en $\epsilon_0 = 1$:

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{5}$$

Neem nu hetvolgende:

$$\mathbf{B} = -\alpha \hat{\mathbf{z}} \times \nabla(\Psi) \tag{6}$$

$$E = -\hat{\mathbf{z}} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{7}$$

- Aan welke Partiële differentiaalvergelijking moet Ψ voldoen?
- Neem nu Ψ onafhankelijk van y. Voor welke waardes van α is dit een hyperbolische differentiaalvergelijking.