

Differentiaalvergelijkingen

Examen 28/01/2022

Vraag 1.

Beschouw de differentiaalvergelijkingen

$$x^3 y'' + x^2 y' + y = 0$$

en

$$x^2 y'' + y' - 2y = 0.$$

- Wat is de aard van het punt $x = 0$ voor beide differentiaalvergelijkingen?
- Toon aan dat de eerste vergelijking geen oplossing heeft als Frobeniusreeks rond $x = 0$ maar de tweede wel.¹
- Vind de oplossing als Frobeniusreeks van de tweede vergelijking.
- Reduceer de tweede differentiaalvergelijking tot een eerste orde differentiaalvergelijking met de oplossing die je hebt gevonden.
- Je hoeft die eerste orde differentiaalvergelijking niet expliciet op te lossen maar je krijgt een bonus als je dat wel doet.

¹Bij deze vraag had de prof. mondeling meegedeeld dat de voorwaarden vanuit het eerste bolletje voor een Frobeniusreeksoplossing een voldoende, maar geen nodige voorwaarde zijn. Je kan nog steeds proberen een Frobeniusreeks invullen zonder dat aan deze voorwaarden is voldaan.

Vraag 2.

Beschouw de vergelijkingen:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \mu \frac{\partial A}{\partial t} \quad (2)$$

waarbij $\mu \in \mathbb{R}$.

1. Beschouw een interval $x \in [0, L]$ en zoek naar oplossingen van vergelijkingen (1) en (2) als $\mu = -\pi$, met scheiding van veranderlijken van het type:

$$A(x, t) = a(t) \sin(2\pi x/L),$$

$$B(x, t) = b(t) \cos(2\pi x/L).$$

Zoek de functies $a(t)$ en $b(t)$ die voldoen aan de vergelijkingen (1) en (2) en aan de beginvoorwaarden:

$$a(0) = 1 \quad b(0) = 1.$$

2. Bereken de partiële differentiaalvergelijking van 2de orde voor $A(x, t)$.
3. Bepaal het interval van waarden voor μ dat de vergelijking voor A hyperbolisch maakt.
4. Beschouw een interval $x \in [0, L]$ met randvoorwaarden $A(x = 0, t) = 0$ en $A(x = L, t) = 0$. De beginvoorwaarden zijn:

$$\lim_{t \rightarrow 0} A(x, t) = f_0(x)$$

en

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\partial A}{\partial t} = 0.$$

Wat is de algemene oplossing voor $A(x, t)$ (als μ in het interval ligt waar de vergelijking hyperbolisch is)?

5. Wat is de snelheid van de golf als functie van μ ?

Vraag 3.

Los de volgende vraag op en leg de procedure uit.

1. Vind de Fouriergetransformeerde $\mathcal{F}\{f\}(k)$ van de functie van $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{4\pi}\right)$$

waar a een generiek reëel getal is. Gebruik de methode die u verkiest.

2. Op basis van de zojuist verkregen resultaten, wat is de Fouriergetransformeerde van de functie gedefinieerd door de volgende integraal:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(z+5)^2}{4\pi}\right) \exp\left(\frac{-(x-z)^2}{2}\right) dz$$

3. Op basis van de eigenschappen van de Fouriergetransformeerde, wat is dan de Fouriergetransformeerde van

$$h(x) = x \exp\left(\frac{-(x-a)^2}{4\pi}\right)$$

4. Gebruik de stelling voor de Fouriergetransformeerde van een convolutieintegraal en bereken de Fouriergetransformeerde van de functie $I(x)$ gedefinieerd via de volgende integraal

$$I(x) = \int_0^{1/2} e^{-(x-t)^2} dt$$