Examen G0U13 Bewijzen en Redeneren
bachelor Fysica, bachelor Wiskunde (verplicht)
bachelor Economische Wetenschappen

en

bachelor Wijsbegeerte (keuze)

vrijdag 29 januari 2010, 8:30–12:30

Naam:

- Geef uw antwoorden in volledige, goed lopende zinnen.
- Het examen bestaat uit 5 vragen. Begin het antwoord op elke vraag op het examenblad en vul eventueel aan met losse bladen.
- Voor elke vraag kunt u 10 punten verdienen. De puntenverdeling per onderdeel is:

Vraag 1:	(a) 4 pt	(b) 3 pt	(c) 3 pt
Vraag 2:	(a) 5 pt	(b) 5 pt	
Vraag 3:	(a) 4 pt	(b) 3 pt	(c) 3 pt
Vraag 4:	(a) 2 pt	(b) 8 pt	
Vraag 5:	(a) 3 pt	(b) 4 pt	(c) 3pt

- Succes!

Naam:

Vraag 1 Bij deze vraag volstaat het om uw antwoord toe te lichten. Volledige bewijzen worden niet gevraagd.

(a) Neem aan dat X en Y eindige verzamelingen zijn met $|X| = n$ en $|Y| = m$.

- (i) Hoeveel functies van X naar Y zijn er?
- (ii) Hoeveel relaties van X naar Y zijn er?

(b) Neem aan dat $X = \{a, b, c\}$ een verzameling is met drie elementen. Hoeveel orderelaties zijn er op X ? Hoeveel daarvan zijn totale ordeningen ?

(c) Welke van de volgende verzamelingen zijn aftelbaar, welke overaftelbaar ? Licht uw

- (i) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$
- (ii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- (iii) De verzameling van alle eindige deelverzamelingen van $\mathbb{N}$.

Naam:

Vraag 2 (a) Zij $f : X \to Y$ en $g : Y \to Z$ twee functies. Neem aan dat $g \circ f$ injectief is. Bewijs dat hieruit volgt dat f injectief is.

(b) Zij $f : X \to Y$ een functie waarvoor geldt dat voor elke verzameling Z en voor elk tweetal functies $g, h : Y \to Z$ geldt dat

$$g \circ f = h \circ f \quad \Longrightarrow \quad g = h.$$

Bewijs dat hieruit volgt dat f surjectief is.

Naam:

Vraag 3 Neem aan dat X een oneindige verzameling is.

Met $\mathrm{Fun}(X, \{0,1\})$ noteren we de verzameling van alle functies van X naar $\{0,1\}$. We definiëren op $\mathrm{Fun}(X, \{0,1\})$ een relatie R door

$$(f,g) \in R \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(0) \setminus g^{-1}(0) \text{ is een aftelbare verzameling.}$$

(a) Bewijs dat R transitief is.

(b) Is R een equivalentierelatie? Bewijs uw antwoord.

(c) Bewijs dat $R \cap R^{-1}$ een equivalentierelatie is.

Naam:

Vraag 4 (a) Geef de definitie van convergentie van een rij (a_n) van reële getallen.

(b) Zij (a_n) de rij gegeven door

$$a_n = \frac{n^2 + n + 1}{2n^2 - 1}$$

Bewijs vanuit de definitie dat de rij (a_n) convergent is.

Naam:

Vraag 5 Zij (a_n) de rij gegeven door $a_0 = 0$ en

$$a_n = \sqrt{2 + \frac{1}{2} a_{n-1}^2}, \qquad \text{voor } n \in \mathbb{N}_0$$

(a) Bewijs met volledige inductie dat $a_n < 2$ voor elke $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bewijs dat de rij stijgend is.

(c) Bewijs dat de rij convergent is. Wat is de limiet ?