Vraag:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	4	4	4	4	4	20
Score:						

Examen Kansrekenen I - juni 2020

Naam :
Voornaam :

Richting :
Studentennummer :

Lees de volgende aanwijzingen alvorens aan het examen te beginnen

- Het is verplicht om tijdens het examen een **mondmasker** te dragen. Je mag je masker voor korte tijd afnemen om iets te drinken en/of te eten.
- Wie de vragen aanneemt en bekijkt, moet **minstens 90 minuten** blijven zitten.
- Schrijf op het 1ste blad duidelijk je volledige naam en richting (en **op elk blad je naam**).
- Je mag gebruik maken van **niet-grafische rekenmachine, tabel met integralen, formularium en statistische tabellen**. Op het formularium en de tabellen mag niets geschreven staan! Berekeningen moeten altijd schriftelijk uitgevoerd worden tot het moment dat je de waarde zou kunnen opzoeken in een statistische tabel. Bijvoorbeeld: het uitrekenen van een kans onder een normale verdeling moet herleid worden tot een kans onder een standaardnormale verdeling. Zoek deze kans vervolgens dan ook op.
- Alle communicatie-apparatuur is strikt verboden.
- Gebruik de voorziene ruimte om te antwoorden op de vragen (voor- en achterkant).
- Bij het indienen van je examen, **geef je ook kladpapier af** (maar daar wordt geen rekening mee gehouden tijdens verbetering). Er is hiervoor een aparte doos voorzien.
- Let op
  - een correct (numeriek) antwoord zonder uitleg (of foute uitleg) is weinig/niets waard!
  - een fout (numeriek) antwoord zonder uitleg is niets waard.
  - een fout numeriek antwoord (bvb. ten gevolge van een rekenfout) met juiste afleiding is veel waard.

  Toon dus **DUIDELIJK aan hoe je tot ieder numeriek resultaat komt** (telegramstijl is toegelaten). Geef de nodige **tussenstappen** en geef aan welke **regels en/of stellingen** je gebruikt bij het oplossen van de vraag. Gebruik de **correcte wiskundige notatie** zoals die in de leerstof is aangebracht. **Verklaar gebruikte symbolen**. Werk met drie cijfers na de komma.
- Je hebt **3 u** tijd om het examen op te lossen.

VEEL SUCCES !

Vraag 1: (4 punten)

(a) Geef de definitie van een stochastische veranderlijke.

Oplossing: Zij $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{Pr})$ een kansruimte, dan heet een reële functie $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die aan elke uitkomst $\omega \in \Omega$ een reëel getal $X(\omega)$ toekent, een stochastische veranderlijke (s.v.) indien

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : X^{-1}(B) = \{\omega | X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

(1 punt)

(b) Zij $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ een kansruimte en zij $X : \Omega \to \mathbb{R}$ een stochastische veranderlijke. Verder zij $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$Y(\omega) \;=\; \begin{cases} X(\omega) & \text{indien} \quad X(\omega) \leq 1 \\ 0 & \text{indien} \quad X(\omega) > 1 \end{cases}.$$

Toon aan dat Y ook een stochastische veranderlijke is.

Oplossing: Zij $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ een Borelverzameling. We onderscheiden twee gevallen:

- Als $0 \notin B$ is

  $$Y^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B \text{ en } X(\omega) < 1\} = X^{-1}(B) \cap X^{-1}((-\infty, 1)).$$

  Omdat X een s.v. is, is dit een doorsnede van twee verzamelingen in $\mathcal{A}$ en dus $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

- Als $0 \in B$ is

  $$\begin{aligned} Y^{-1}(B) &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > 1\} \cup \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B \text{ en } X(\omega) < 1\} \\ &= X^{-1}((1, \infty)) \cup (X^{-1}(B) \cap X^{-1}((-\infty, 1))). \end{aligned}$$

  Omdat X een s.v. is, is dit de unie van twee verzamelingen in $\mathcal{A}$ en dus $Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

(2 punten voor een juiste beschrijving van de inverse beelden (1 deelpunt voor een gedeeltelijk juiste beschrijving, wees genereus. 1 punt voor het correcte gebruik van de meetbaarheid van X).

Vraag 2: (4 punten)

In een tegelfabriek zijn er drie productielijnen: A, B en C, die respectievelijk 25%, 35% en 40% van de totale hoeveelheid tegels produceren. Van de tegels die door productielijn A geproduceerd worden, zijn er 6% kapot. Voor productielijn B is dit 2% en voor productielijn C is dit 3%.

(a) Als een willekeurig geselecteerde tegel kapot blijkt, wat is dan de kans dat deze tegel door productielijn A is geproduceerd? Wees precies en geef aan welke kansregels uit de cursus je gebruikt om tot een antwoord te komen.

Oplossing: Zij A de gebeurtenis dat een tegel geproduceerd in lijn A kapot is, analoog voor B en C. Noteer de gebeurtenis dat een tegel kapot is met D. We gebruiken de stelling van Bayes:

$$P(A|D) = \frac{P(D|A)P(A)}{P(D)}.$$

Om $P(D)$ te vinden gebruiken we de wet van de totale kans

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ &= 0.06 \times 0.25 + 0.02 \times 0.35 + 0.03 \times 0.4 = 0.034. \end{aligned}$$

Als we deze waarden invullen, dan vinden we

$$P(A|D) = \frac{0.06 \times 0.25}{0.034} = 0.4412.$$

(1 punt voor het toepassen van Bayes en de juiste formule voor de noemer. 1 punt voor een correcte berekening.)

(b) Voor een groot bouwproject koopt Julie 800 tegels. Wat is de kans dat meer dan 30 van de tegels kapot zijn? Indien je de kans dat een tegel kapot is niet vindt, gebruik hiervoor dan 0.03 (dit is niet de correcte waarde).

Oplossing: De kans dat exact een tegel kapot is, is 0.034. Bijgevolg vinden we een binomiale verdeling met parameters $p = 0.034$ en $n = 800$. We checken dat $np = 27.2 > 5$ en $n(1-p) = 772.8 > 5$ en dus kunnen we de normale benadering gebruiken. We vinden dan $N(27.2, 5.126^2)$.

$$\begin{aligned} P(X > 30) &= 1 - P(X \leqslant 30) = 1 - \Phi\left(\frac{30 + 0.5 - 27.2}{5.126}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.644) = 1 - 0.7402 = 0.2598. \end{aligned}$$

Als 0.03 gebruikt wordt voor de kans dat een tegel kapot is, krijgen we een binomiaalverdeling met parameters $p = 0.03$ en $n = 800$. Nog steeds is $np = 24 > 5$ en $n(1-p) = 776 > 5$ en kan de normale benadering dus gebruikt worden. We vinden dan $N(24, 4.825^2)$.

$$\begin{aligned} P(X > 30) &= 1 - P(X \leqslant 30) = 1 - \Phi\left(\frac{30 + 0.5 - 24}{4.825}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.347) = 1 - 0.911 = 0.089. \end{aligned}$$

(1 punt voor het gebruik van de normale benadering. 0.5 punten voor de continuiteitscorrectie. 0.5 punten voor een correct eindresultaat.)

Vraag 3: (4 punten)

Een discrete variabele X heeft volgende momentgenererende functie

$$M_X(t) = \frac{1}{4}(e^{-3t} + e^{-t} + e^t + e^{3t}).$$

(a) Bereken de variantie van X.

Oplossing: We weten dat $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$ en deze 2 verwachtingen kunnen we als volgt bepalen uit de MGF:

$$E(X) = \frac{d}{dt}M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{4}(-3-1+1+3) = 0$$
$$E(X^2) = \frac{d^2}{dt^2}M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{1}{4}(9+1+1+9) = \frac{20}{4} = 5.$$

Dit geeft dan $\text{Var}(X) = 5 - 0 = 5$. (1 punt voor een correcte berekening van de afgeleiden. 1 punt voor de correcte formule voor de variante. Geef deze punt ook als de afgeleiden fout zijn maar de formule voor de variantie wel correct is.)

(b) Geef, gebruik makende van de variantie berekend in deel (a), een ondergrens voor volgende kans: $P\left(|X| < \frac{9}{4}\right)$. Wees nauwkeuriger dan $P\left(|X| < \frac{9}{4}\right) \geq 0$. Als je deel (a) niet hebt opgelost, mag je veronderstellen dat $E(X) = 0$ en $\text{Var}(X) = 4$ (dit is niet de juiste variantie).

Oplossing: We gaan een benadering zoeken voor deze kans via een gevolg van de ongelijkheid van Chebychev:

$$P\left(|X| \geq \frac{9}{4}\right) = P\left(|X - 0| \geq \frac{9}{4}\right) = P\left(|X - E(X)| \geq \frac{9}{4}\right)$$
$$\leq \frac{\text{Var}(X)}{(9/4)^2} = \frac{5}{81/16} = \frac{80}{81}.$$

Dit geeft dan

$$P\left(|X| < \frac{9}{4}\right) = 1 - P\left(|X| \geq \frac{9}{4}\right) \geq 1 - \frac{80}{81} = \frac{1}{81} = 0.012.$$

Met $\text{Var}(X) = 4$ is de correcte oplossing

$$P\left(|X| \geq \frac{9}{4}\right) \leq \frac{\text{Var}(X)}{(9/4)^2} = \frac{4}{81/16} = \frac{64}{81}.$$

Dit geeft dan

$$P\left(|X| < \frac{9}{4}\right) = 1 - P\left(|X| \geq \frac{9}{4}\right) \geq 1 - \frac{64}{81} = \frac{17}{81} = 0.21.$$

(1 punt voor het toepassen van Chebyshev. 1 punt voor een correct resultaat.)

Vraag 4: (4 punten)

Een apparaat bestaat uit 2 componenten en stopt met werken zodra minstens 1 van de 2 componenten faalt. Stel X en Y de respectievelijke levensduren (uitgedrukt in uren) van de 2 componenten. Stel dat de gezamenlijke dichtheidsfunctie van de levensduren gegeven wordt door

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+y) & \text{als } 0 < x < 4 \text{ en } 0 < y < 4, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

(a) Bepaal c zodanig dat $f_{X,Y}$ effectief een dichtheidsfunctie is.

Oplossing: Er geldt dat

$$1 = \int_0^4 \int_0^4 c(x+y)\, dxdy = c \int_0^4 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_0^4 dy = c \int_0^4 8 + 4y\, dy$$
$$= c\left[8y + 2y^2\right]_0^4 = 64c,$$

dus hebben we dat $c = \frac{1}{64}$. (1 punt)

(b) Bepaal de kans dat het apparaat binnen het uur faalt.

Oplossing:
De kans dat het apparaat faalt binnen het uur is dan:

$$\begin{aligned} P((X \leq 1) \cup (Y \leq 1)) = 1 - P((X \geq 1) \cap (Y \geq 1)) &= 1 - \frac{1}{64} \int_1^4 \int_1^4 (x+y)\, dxdy \\ &= 1 - \frac{1}{64} \int_1^4 \left[\frac{x^2}{2} + xy\right]_1^4 dy \\ &= 1 - \frac{1}{64} \int_1^4 \left[\frac{15}{2} + 3y\right] dy \\ &= 1 - \frac{1}{64} \left[\frac{15}{2}y + \frac{3}{2}y^2\right]_1^4 \\ &= 1 - \frac{45}{64} = \frac{19}{64} = 0.297. \end{aligned}$$

Alternatief:

$$\begin{aligned} P((X \leq 1) \cup (Y \leq 1)) &= \int_0^1 \int_0^4 \frac{1}{64}(x+y)\, dydx + \int_1^4 \int_0^1 \frac{1}{64}(x+y)\, dydx \\ &= \frac{1}{64}\left(\int_0^1 8 + 4x\, dx + \int_1^4 \frac{1}{2} + x\, dx\right) \\ &= \frac{1}{64}\left(8 + 2 + 2 + 8 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{19}{64} = 0.297 \end{aligned}$$

(1 punt voor een juiste aanpak. 1 punt voor een correct resultaat.)

(c) Bereken $f_{Y|X}(y|x)$.

Oplossing: We vinden dat

$$f_X(x) = \int_0^4 \frac{1}{64}(x+y)\,dy = \frac{1}{64}\,(4x+8) = \frac{x+2}{16}.$$

Dit geeft dan

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y}{4\,(x+2)}.$$

Het definitiegebied is $0 < x < 4$ en $0 < y < 4$. (0.5 punten voor de juiste formule voor $f_{Y|X}(y|x)$, 0.5 punten voor het definitiegebied.)

Vraag 5: (4 punten)

Beschouw een toevalsvariabele X met de volgende cumulatieve verdelingsfunctie

$$F_X(x) = 1 - e^{-(x/\alpha)^\beta} \qquad x \geq 0$$

met parameters $\alpha > 0$ en $\beta > 0$. Deze verdelingsfunctie beschrijft de Weibull verdeling.

(a) Bepaal de dichtheidsfunctie van X.

Oplossing:

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \frac{\beta}{\alpha^\beta} x^{\beta-1} e^{(-(x/\alpha)^\beta)}$$

(1 punt)

(b) Stel $Y = \left(\frac{X}{\alpha}\right)^\beta$. Bepaal de verdeling van Y.

Oplossing:

$$\begin{aligned} g &: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ : x \mapsto y = g(x) = (x/\alpha)^\beta \\ h = g^{-1} &: y \mapsto x = h(y) = \alpha\, y^{1/\beta} \\ f_Y(y) &= f_X(h(y))\, |h'(y)| = \frac{\beta}{\alpha} y^{(\beta-1)/\beta} e^{-y} \frac{\alpha}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} \qquad (y \geq 0) \\ &= e^{-y} \Leftrightarrow Y \sim \mathcal{E}(1) \end{aligned}$$

Merk op dat g een strikt stijgende, differentieerbare functie is met beeld $\mathbb{R}_0^+$ en dus voldoet aan de voorwaarden van de transformatiestelling. (1 punt voor de correcte berekening, 1 punt voor het vermelden van de voorwaarden.)
Alternatieve oplossing:

$$\begin{aligned} P(Y > y) &= P(\left(\frac{X}{\alpha}\right)^\beta > y) = P(X > \alpha y^{1/\beta}) \\ &= 1 - F_X(\alpha y^{1/\beta}) = e^{-y}. \end{aligned}$$

$\Rightarrow F_Y(y) = 1 - e^{-y}$ voor $y \geq 0$, dus $Y \sim \mathcal{E}(1)$. (1 punt voor de correcte berekening van de dichtheids- of de verdelingsfunctie. 1 punt voor de conclusie dat $Y \sim \mathcal{E}(1)$).

(c) Hoe kunnen we Weibull verdeelde stochastische veranderlijken genereren, vertrekkende van $U \sim U[0,1]$?

Oplossing:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - \exp(-(x/\alpha)^\beta) \\ z &= 1 - \exp(-(x/\alpha)^\beta) \\ x &= a\,(-\log(1-z))^{1/\beta} \\ F_X^{-1}(z) &= \alpha\,(-\log(1-z))^{1/\beta} \end{aligned}$$

Gegeven $u \sim U(0,1)$, dan is $F_X^{-1}(u) = \alpha\,(-\log(1-u))^{1/\beta}$ Weibull verdeeld met parameters $\alpha > 0$ en $\beta > 0$. Dit is equivalent met $\alpha\,(-\log(u))^{1/\beta}$ is Weibull verdeeld met parameters $\alpha > 0$ en $\beta > 0$.

(1 punt, wees genereus.)