Examen Klassieke Mechanica

Prof. Van Riet

Januari 2022

1 Lagrangiaanse systemen [8p]

Een positief geladen deelte met massa m en lading q beweegt over het oppervlak van een bol met straal R. Het geheel bevindt zich in een constant elektrisch veld dat naar boven wijst:

$$\vec{E} = E\hat{k}$$

Herinner dat de elektrische kracht gegeven is door $\vec{F} = q\vec{E}$. Voor deze vraag dien je zwaartekracht niet in rekening te brengen.

1. Wat is de Lagrangiaan van het systeem?
2. De totale energie is behouden. Welke andere grootheid ook?
3. Het deeltje kan op een bepaalde hoogte blijven zweven. Welke hoogte?[1]
4. Wat is het stabiel evenwicht op de bol? Toon aan dat het stabiel is.
5. Wat is/zijn de normale trillingsfrequentie(s)?

2 Tweelichamenprobleem

Beschouw twee objecten met massa's m_1 en m_2 die enkel onderhevig zijn aan elkaars gravitatie. Initieel bevinden ze zich op een afstand d van elkaar met snelheden respectievelijk $\vec{v_1}$ en $\vec{v_2}$ en impactparameter p. Wat is de voorwaarde op de begintoestand $(m_1, m_2, d, p, \vec{v_1}, \vec{v_2})$ zodat de deeltjes kunnen ontsnappen van elkaars gravitatie?[2]

[1] Iemand vroeg tijdens het examen om dit te verduidelijken: concreet wordt gevraagd naar oplossingen waarbij de hoogte van het deeltje constant is.

[2] Een dergelijke vraag heeft al vaker gefigureerd op het examen. Voor zij die er niet uit geraken kan voorbeeld 10.8 op p266 in Gregory verhelderend zijn.

3 Lagrange en Symmetrie

Beschouw een Lagrangiaan $L(q^a, \dot{q}^a)$.

1. Bewijs dat als we een tijdsafgeleide toevoegen aan de Lagrangiaan, i.e. een transformatie van de vorm $L \mapsto L + \frac{df(q)}{dt}$ uitvoeren, dit geen effect heeft op de bewegingsvergelijkingen.

2. Bekijk nu een transformatie van de veralgemeende coördinaten

$$q^a \mapsto q^a + \epsilon(t) n^a(q)$$

waarbij n^a een functie is die van q afhangt en ϵ een infinitesimaal kleine functie[3] *die van de tijd kan afhangen*[4]. Dan transformeert de Lagrangiaan als volgt (op eerste orde in ϵ):

$$L \mapsto L + \dot{\epsilon} Q(q, \dot{q}) + \epsilon R(q, \dot{q})$$

waarbij R en Q functies zijn in $(q, \dot{q})$. Stel nu dat $R = 0$. Dan is er een behouden grootheid. Waarom denk je dat dit het geval is?

3. Deze behouden grootheid komt overeen met Q. Bewijs. Tip (gegeven op examen): denk aan partiële integratie.

4. Illustreer het bovenstaande resulaat voor de concrete situatie van een vrij deeltje in twee dimensies ($L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$) met als transformatie de rotatie rond de oorsprong met een infinitesimaal kleine hoek die tijdsafhankelijk is. Begin met het noteren van de transformatie in de vorm

$$x \mapsto \ldots, \qquad y \mapsto \ldots$$

[3]Persoonlijk vond ik de verwoording 'infinitesimaal kleine functie' nogal vreemd, maar ik veronderstel dat gewoon bedoeld wordt dat je overal eerste orde benadering in ϵ en $\dot{\epsilon}$ kan uitvoeren

[4]Bemerk het verschil met de formulering in het theorema van Noether.