

Examen Kansrekenen

23 juni 2020

Vraag 1 (4pt)

(a)

Geef de definitie van een σ -algebra

(b)

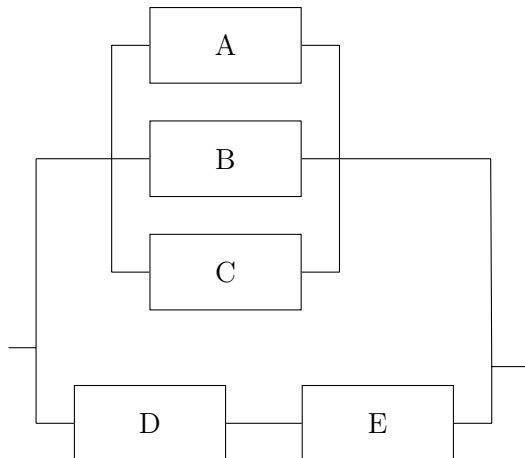
Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en zij $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ een stochastische veranderlijke. Verder zij $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{indien } |X(\omega)| \leq 2 \\ 0 & \text{indien } |X(\omega)| > 2 \end{cases}$$

Toon aan dat Y ook een stochastische veranderlijke is.

Vraag 2 (4pt)

Beschouw de onderstaande schakeling met vijf componenten A, B, C, D, en E:



Het is geweten dat het falen van elk van deze componenten onafhankelijk van elkaar is, en dat:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.4, & P(B) &= 0.3, & P(C) &= 0.5, \\ P(D) &= 0.3, & P(E) &= 0.1 \end{aligned}$$

waarbij $P(A)$ de faalkans voorstelt dat component A faalt enz.

(a)

Wat is de kans dat het systeem faalt?

(b)

Als geweten is dat het systeem niet faalt, wat is dan de kans dat component B faalt?

Vraag 3 (4pt)

Een discrete variabele X heeft de volgende momentgenererende functie:

$$M_X(t) = \frac{1}{4} \left(e^{-at} + e^{-t} + e^t + e^{bt} \right)$$

met parameters $a > 0$ en $b > 0$.

(a)

Bereken de waarden van a en b als geweten is dat $E(X) = 0$ en $Var(X) = 13$.

(b)

Geef, gebruik makende van $E(X) = 0$ en $Var(X) = 13$, een ondergrens voor volgende kans: $P(|X| < 4)$. Wees nauwkeuriger dan $P(|X| < 4) \geq 0$.

Vraag 4 (4pt)

Stel dat X de score is op een wiskunde test (tussen 0 en 1) en Y de score is op een fysicatest (ook tussen 0 en 1). Stel dat voor studenten van de KU Leuven de scores X en Y de volgende gezamenlijke dichtheidsfunctie hebben:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+3y) & 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \\ 0 & \text{elders} \end{cases}.$$

(a)

Bepaal de constante c

(b)

Bereken de proportie studenten die meer dan 0.8 scoorden op de wiskunde-test.

(c)

Gegeven dat een student 0.3 behaalde op de fysica-test, wat is de kans dat de score op de wiskunde test groter zal zijn dan 0.8?

Vraag 5 (4pt)

De dichtheidsfunctie van een s.v. X wordt gegeven door:

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x}{\theta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) & x > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}.$$

Hierbij is $\theta > 0$ een schaalparameter. Deze dichtheidsfunctie wordt de Rayleigh dichtheidsfunctie genoemd.

(a)

Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van X .

(b)

Stel dat de s.v. X Rayleigh-verdeeld is. Hoe is $Y = X^2$ dan verdeeld?

(c)

Leg zo gedetailleerd mogelijk uit hoe je random getallen uit een Rayleigh verdeling kan genereren, vertrekkende van random getallen uit de standaard uniforme verdeling $U \in \mathcal{U}[0, 1]$.