

Examen Kansrekenen: Antwoorden

Andreas Hinderyckx

23 juni 2020

Dit zijn mijn persoonlijke antwoorden en werkwijzes om de vragen op te lossen. Hier kunnen zeker fouten in staan, indien je er mocht vinden mag je mij dit altijd laten weten en update ik het document even!

Vraag 1 (4pt)

(a)

Geef de definitie van een σ -algebra

Antwoord

Zie cursus.

(b)

Zij $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ en zij $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ een stochastische veranderlijke. Verder zij $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door:

$$Y(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{indien } |X(\omega)| \leq 2 \\ 0 & \text{indien } |X(\omega)| > 2 \end{cases}$$

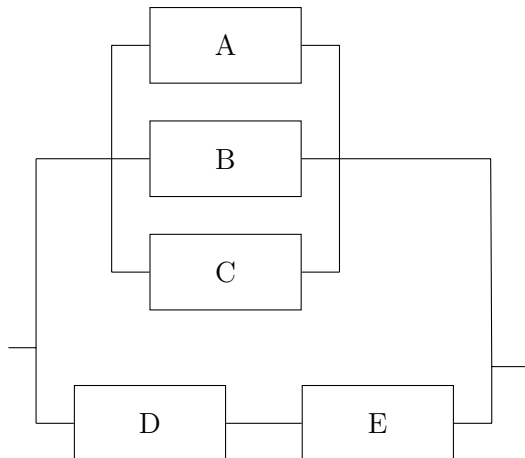
Toon aan dat Y ook een stochastische veranderlijke is.

Antwoord

Hiervoor was ik niet exact zeker of mijn oplossing helemaal correct was, daarmee dat je best nog eens de oefeningen in de extra bundel van hoofdstuk 1 hiervoor bekijkt voor voorbeelden die gelijkaardig zijn.

Vraag 2 (4pt)

Beschouw de onderstaande schakeling met vijf componenten A, B, C, D, en E:



Het is geweten dat het falen van elk van deze componenten onafhankelijk van elkaar is, en dat:

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.4, & P(B) &= 0.3, & P(C) &= 0.5, \\ P(D) &= 0.3, & P(E) &= 0.1 \end{aligned}$$

waarbij $P(A)$ de faalkans voorstelt dat component A faalt enz.

(a)

Wat is de kans dat het systeem faalt?

Antwoord

Deze vraag kunnen we oplossen gebruikmakende van de onafhankelijkheid van de faalkansen van de componenten. Stel $P(S)$ de kans dat het systeem faalt, dan geldt:

$$\begin{aligned}
P(S) &= P((A \cap B \cap C) \cap (D \cup E)) \\
&= P(A \cap B \cap C) P(D \cup E) \\
&= P(A)P(B)P(C) (1 - P(D^c \cap E^c)) \\
&= P(A)P(B)P(C) (1 - P(D^c)P(E^c)) \\
&= P(A)P(B)P(C) (1 - (1 - P(D))(1 - P(E))) \\
&= 0.4 \times 0.3 \times 0.5(1 - (1 - 0.3)(1 - 0.1)) \\
&= 0.0222
\end{aligned}$$

(b)

Als geweten is dat het systeem niet faalt, wat is dan de kans dat component B faalt?

Antwoord

De kans die gevraagd is, is:

$$P(B|S^c) \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P(S^c|B)P(B)}{P(S^c)} \quad (1)$$

We moeten dus nog enkel de kans $P(S^c|B)$ berekenen: de kans dat het systeem niet faalt, als we weten dat component B faalt. Indien component B faalt, kan het systeem enkel werken als:

- A werkt, of
- C werkt, of
- D en E werken.

Dit geeft ons:

$$\begin{aligned}
P(S^c|B) &= P((A \text{ of } C) \text{ of } (D \text{ en } E \text{ werken})) \\
&= P((A \cup C) \cup (D \cap E)) \\
&= 1 - P((A \cup C)^c \cap (D \cap E)^c) \\
&= 1 - P(A^c \cap C^c)P((D \cap E)^c) \\
&= 1 - P(A^c)P(C^c)(1 - P(D)P(E)) \\
&= 1 - (1 - P(A))(1 - P(C))(1 - P(D)P(E)) \\
&= 1 - (1 - 0.4)(1 - 0.5)(1 - 0.3 \times 0.1) \\
&= 0.709
\end{aligned}$$

Na dit resultaat in te vullen in (1) geeft dit:

$$P(B|S^c) = \frac{0.709 \times 0.3}{1 - 0.0222} \approx 0.2175$$

Vraag 3 (4pt)

Een discrete variabele X heeft de volgende momentgenererende functie:

$$M_X(t) = \frac{1}{4} \left(e^{-at} + e^{-t} + e^t + e^{bt} \right)$$

met parameters $a > 0$ en $b > 0$.

(a)

Bereken de waarden van a en b als geweten is dat $E(X) = 0$ en $\text{Var}(X) = 13$.

Antwoord

Uit de gegevens vinden we volgend stelsel:

$$\begin{cases} E[X] = \alpha_1(X) = 0 \\ \text{Var}[X] = \alpha_2(X) - \alpha_1(X)^2 = 13 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha_1(X) = 0 \\ \alpha_2(X) = 13 \end{cases} \quad (2)$$

Om dit op te lossen berekenen we eerst uit $\alpha_1(X)$:

$$\begin{aligned} & \alpha_1(X) = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{d}{dt} M_X(t) \right]_{t=0} = 0 \\ \Rightarrow & \left[\frac{1}{4} \left(-ae^{-at} - e^{-t} + e^t + be^{bt} \right) \right]_{t=0} = 0 \\ \Rightarrow & -a - 1 + 1 + b = 0 \\ \Rightarrow & b - a = 0 \end{aligned}$$

Analoog vinden we uit $\alpha_2(X)$:

$$\begin{aligned}
 \alpha_2(X) &= 13 \\
 \Rightarrow \left[\frac{d^2}{dt^2} M_X(t) \right]_{t=0} &= 13 \\
 \Rightarrow \left[\frac{1}{4} \left(a^2 e^{-at} + e^{-t} + e^t + b^2 e^{bt} \right) \right]_{t=0} &= 13 \\
 \Rightarrow a^2 + 1 + 1 + b^2 &= 52
 \end{aligned}$$

Hiermee kunnen we stelsel (2) verder uitwerken:

$$\begin{cases} b = a \\ A^2 + b^2 = 50 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b = a \\ 2a^2 = 50 \end{cases} \xrightarrow{a>0} \begin{cases} b = 5 \\ a = 5 \end{cases}$$

(b)

Geef, gebruik makende van $E(X) = 0$ en $Var(X) = 13$, een ondergrens voor volgende kans: $P(|X| < 4)$.

Antwoord

Met behulp van het tweede gevolg uit de ongelijkheden van Chebyshev vinden we voor een s.v. met verwachtingswaarde μ en variantie σ^2 :

$$\begin{aligned}
 P(|X - \mu| \geq a) &\leq \frac{\sigma^2}{a^2} \\
 \Leftrightarrow 1 - P(|X - \mu| < a) &\leq \frac{\sigma^2}{a^2} \\
 \Leftrightarrow P(|X - \mu| < a) &\geq 1 - \frac{\sigma^2}{a^2}
 \end{aligned}$$

Hiermee kunnen we een ondergrens voor de gevraagde kans opstellen, waarbij we $a = 4$ nemen:

$$\begin{aligned}
 P(|X - 0| < 4) &\geq 1 - \frac{13}{4^2} \\
 \Leftrightarrow P(|X| < 4) &\geq \frac{3}{16} = 0.1875
 \end{aligned}$$

Vraag 4 (4pt)

Stel dat X de score is op een wiskunde test (tussen 0 en 1) en Y de score is op een fysicatest (ook tussen 0 en 1). Stel dat voor studenten van de KU Leuven de scores X en Y de volgende gezamenlijke dichtheidsfunctie hebben:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(x+3y) & 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \\ 0 & \text{elders} \end{cases}.$$

(a)

Bepaal de constante c

Antwoord

We weten dat voor elke dichtheidsfunctie $f_{X,Y}(x,y)$ moet gelden dat $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx = 1$. We passen deze redenering toe op de gegeven functie om c te vinden:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 c(x+3y) dy dx \\ &= c \int_0^1 \left[xy + \frac{1}{2} 3y^2 \right]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= c \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2} \right) dx \\ &= c \left[\frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= 2c \\ &\Rightarrow c = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b)

Bereken de proportie studenten die meer dan 0.8 scoorden op de wiskunde-test.

Antwoord

De gevraagde proportie is $P(X > 0.8)$. Om deze te berekenen berekenen we eerst de marginale verdelingsfunctie f_X als volgt:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x + 3y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[xy + \frac{3y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{2} \right) \end{aligned}$$

Hiermee berekenen we de gevraagde proportie:

$$\begin{aligned} P(X > 0.8) &= \int_{0.8}^1 f_X(x) dx \\ &= \int_{0.8}^1 \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_{x=0.8}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{0.8^2}{2} + \frac{3}{2} \times 0.8 \right) \right) \\ &= 0.24 \end{aligned}$$

(c)

Gegeven dat een student 0.3 behaalde op de fysica-test, wat is de kans dat de score op de wiskunde test groter zal zijn dan 0.8?

Antwoord

De gevraagde kans is: $P(X > 0.8|Y = 0.3)$. Om deze kans te berekenen, berekenen we eerst de voorwaardelijke verdelingsfunctie $f_{X|Y}(x|y)$, waarvoor

we eerst de marginale verdelingsfunctie van Y nodig hebben:

$$\begin{aligned}
 f_Y(y) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x, y) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x + 3y) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 + 3xy \right]_{x=0.8}^{x=1} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{2} + 3y \right) - \left(\frac{1}{2}0.8^2 + 3 \times 0.8y \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} (0.18 + 0.6y)
 \end{aligned}$$

De voorwaardelijke dichtheidsfunctie wordt dan:

$$\begin{aligned}
 f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(x + 3y)}{\frac{1}{2} (0.18 + 0.6y)} \\
 &= \frac{x + 3y}{0.18 + 0.6y}
 \end{aligned}$$

Dus is de gevraagde kans dan gelijk aan:

$$\begin{aligned}
 P(X > 0.8|Y = 0.3) &= \int_{0.8}^1 f_{X|Y=0.3}(x|y = 0.3) \, dx \\
 &= \int_{0.8}^1 \frac{x + 3 \times 0.3}{0.18 + 0.6 \times 0.3} \, dx \\
 &= \left[\frac{x + 1.8}{0.36} \right]_{x=0.8}^{x=1} \\
 &= \frac{1}{0.36} (1 - 0.8) \\
 &= \frac{5}{9} \\
 &\approx 0.5556
 \end{aligned}$$

Vraag 5 (4pt)

De dichtheidsfunctie van een s.v. X wordt gegeven door:

$$f_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{2x}{\theta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) & x > 0 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}.$$

Hierbij is $\theta > 0$ een schaalparameter. Deze dichtheidsfunctie wordt de Rayleigh-dichtheidsfunctie genoemd.

(a)

Bereken de cumulatieve verdelingsfunctie van X .

Antwoord

De cumulatieve verdelingsfunctie vinden we door de dichtheidsfunctie te integreren:

$$\begin{aligned} F_X(a) &= \int_{-\infty}^a f_X(x) dx \\ &\stackrel{x \geq 0}{=} \int_0^a \left(\frac{2x}{\theta}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{\theta}\right) dx \\ &= \frac{1}{\theta} \int_0^a e^{-\frac{t}{\theta}} dt \\ &= \frac{1}{\theta}(-\theta) \left[e^{-\frac{t}{\theta}} \right]_{x=0}^{x=a} \\ &= - \left[e^{-\frac{x^2}{\theta}} \right]_{x=0}^{x=a} \\ &= - \left[e^{-\frac{a^2}{\theta}} - e^{-0} \right] \\ &= 1 - e^{-\frac{a^2}{\theta}} \end{aligned}$$

(b)

Stel dat de s.v. X Rayleigh-verdeeld is. Hoe is $Y = X^2$ dan verdeeld?

Antwoord

We weten dat de transformatie $h(x) = x^2$, waaruit we vinden dat $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$ omdat de dichtheidsfunctie niet-nul is voor $x > 0$. Omdat $f_X(x) = 0$

voor $x \notin S = h(S) =]0, +\infty[$ en h een strikt-stijgende functie op S is, kunnen we de verdeling van $Y = X^2$ bepalen met behulp van de stelling van de transformatie van een s.v.:

$$\begin{aligned} f_Y(u) &= f_X(h^{-1}(u)) \left| \frac{dh^{-1}(u)}{du} \right| \\ &= \frac{2\sqrt{u}}{\theta} e^{-\frac{u}{\theta}} \frac{1}{2\sqrt{\theta}} \\ &= \frac{1}{\theta} e^{-\frac{u}{\theta}} \\ &\sim \varepsilon\left(\frac{1}{\theta}\right). \end{aligned}$$

We vinden dat - indien $X \sim \text{Rayleigh}(\theta)$ en $u > 0$, $Y = X^2$ exponentieel verdeeld zal zijn met parameter $\frac{1}{\theta}$.

(c)

Leg zo gedetailleerd mogelijk uit hoe je random getallen uit een Rayleigh verdeling kan genereren, vertrekkende van random getallen uit de standaard uniforme verdeling $U \in \mathcal{U}[0, 1]$.

Antwoord

We kunnen random getallen uit een Rayleigh-verdeling bekomen door het omgekeerde van de Integraal-stelling toe te passen op de standaard uniform-verdeelde s.v. U : dit houdt in dat we de inverse verdelingsfunctie van de s.v. X , nl. F_X^{-1} , eerst berekenen en toepassen op U .

Uit vraag (a) weten we dat:

$$F_X(a) = 1 - e^{-\frac{a^2}{\theta}}.$$

Stel nu $y = F_X(a)$, dan berekenen we F_X^{-1} als volgt:

$$\begin{aligned} y &= 1 - e^{-\frac{a^2}{\theta}} \\ \Rightarrow 1 - y &= e^{-\frac{a^2}{\theta}} \\ \Rightarrow \ln(1 - y) &= -\frac{a^2}{\theta} \\ \Rightarrow -\theta \ln(1 - y) &= a^2 \\ \stackrel{a \geq 0}{\Rightarrow} F_X^{-1}(y) &= \sqrt{-\theta \ln(1 - y)} \end{aligned}$$

We kunnen besluiten dat we random getallen uit de Rayleigh-verdeling kunnen genereren door de inverse verdelingsfunctie $F_X^{-1}(U) = \sqrt{-\theta \ln(1 - U)}$ op de s.v. U toe te passen.

Noot: De beschreven antwoorden op Vraag 5 kan je nagaan op de Wikipedia-pagina van de Rayleigh-verdeling. Hier wordt echter in plaats van de parameter θ , gebruikgemaakt van de parameter $\sigma = \sqrt{\frac{\theta}{2}}$.