

Examen Klassieke Mechanica

Nicolas Tribouillard

19 Augustus 2021

Vraag 1: Theorie (5 punten)

We hebben een Hamiltoniaans systeem met gegeneraliseerde coördinaten q_i en momenta p_i met $i = 1, \dots, n$. Stel dat de Hamiltoniaan van het systeem de volgende specifieke vorm heeft:

$$H = H[f_1(q_1, p_1), f_2(q_2, p_2), \dots, f_n(q_n, p_n)] \quad (1)$$

met f_i dus enkel afhankelijk van de twee variabelen q_i en p_i . Toon aan dat elke f_i een constante is van de beweging.

Vraag 2: Gravitatie (7 punten)

Zij m_1 en m_2 twee massa's in de ruimte. m_1 beweegt met een snelheid v_1 en m_2 beweegt met een snelheid v_2 die parallel is aan v_1 met een impactparameter gelijk aan p . M.a.w. de twee massa's bewegen op $t = 0$ naar elkaar toe en de loodrechte afstand tussen de rechten gevormd door de twee snelheden v_1 en v_2 te verlengen is gelijk aan p . De twee snelheden kunnen zowel in dezelfde als in tegengestelde zin zijn en de afstand tussen de twee objecten op tijdstip $t = 0$ is gelijk aan d . Wat is de minimale relatieve snelheid die de twee massa's t.o.v. elkaar moeten hebben opdat ze niet in elkaars gravitatieveld vastkomen?

Vraag 3: Lagrange (8 punten)

Stel dat we een homogene, dunne staaf hebben met massa m die vrij kan bewegen in het gravitatieveld van de aarde. Eén van de twee uiteinden is vastgemaakt aan een punt B , dewelke aangedreven wordt tot een simpele harmonische beweging in de horizontale richting met amplitude A en pulsatie

ω . De scharnier die de staaf verbindt met het punt B is ideaal en er is geen wrijving. M.a.w. de staaf kan bewegen als een gewone slinger, maar het ophangpunt beweegt harmonisch van links naar rechts. Het geheel beweegt in één verticaal vlak.

Stel de vergelijkingen van Lagrange op voor dit systeem.

Wat worden deze vergelijkingen indien de slingerbeweging klein is?

Hoe kan de beweging in dit geval geïnterpreteerd worden?

(Nota student: er stond vergelijkingen (meervoud), maar ik vermoed dat er slechts één vergelijking is.)