Examen lineaire algebra 28 augustus 2018, informatica

iemand die niet deftig LaTeX-bestanden kan maken

August 29, 2018

1

Zij $(R, V, +)$ een eindigdimensionale vectorruimte en U,$W \subset V$ deelruimten. Vul de formule aan en bewijs de stelling:

$$dim(U \cap W) + dim(\dots) = dim(U) + dim(W) \tag{1}$$

2

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en vierkant en $\lambda \in \mathbb{R}$. Bewijs dat λ een eigenwaarde is van A als en slechts als λ een wortel van de karakteristieke veelterm $\varphi_A(X)$ van A is.

3 Waar of fout: argumenteer

3.1 (a)

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A is symmetrisch als en slechts als de kolomruimte van A gelijk is aan de rijruimte van A.

3.2 (b)

$\psi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ is een isomorfisme. Bekijk de vectoren in $\mathbb{R}^n$ als kolomvectoren. Dan is

$$\langle ., . \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} : (X, Y) \mapsto \psi(X)^T Y \tag{2}$$

een inproduct op $\mathbb{R}^n$.

3.3 (c)

A,$B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en diagonaliseerbaar. Dan is $A + B$ ook diagonaliseerbaar.

4

Gegeven is $a \in \mathbb{R}$ en $L_a : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R} : (x, y, z) \mapsto det \begin{smallmatrix} 1 & 2 & x \\ 2a & 4a & y \\ 3 & 6a^2 & z \end{smallmatrix}$

4.1 (a)

Bewijs voor alle $a \in \mathbb{R}$ dat L_a een lineaire afbeelding is.

4.2 (b)

Bepaal $ker(L_a)$ en $Im(L_a)$ en een basis en dimensie in functie van a.

5

Noteer $\langle ., . \rangle$ voor het standaard inproduct op $\mathbb{R}^3$. $\lambda \in \mathbb{R}$. Beschouw $v_1 = (\lambda, 1, 0)$ en $v_2 = (\lambda, 0, 1)$. Definiëer de lineaire afbeelding

$$L : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 : v \mapsto \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2. \tag{3}$$

5.1 (a)

Vind $w \in \mathbb{R}^3$ en $win\{v_1, v_2\}^{\perp}$ zodat v_1, v_2, w een basis voor $\mathbb{R}^3$ is.

5.2 (b)

Bepaal dematrix van L ten opzichte van de basis in (a).

5.3 (c)

Bepaal voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ de eigenwaarden van L.

5.4 (d)

Bepaal voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ de orthogonale basis van eigenvectoren van L.