# Examen Lineaire Algebra 2020 (Wiskunde/Fysica)

$\subset$ Wina

Maandag

**Noot vooraf:** Je kreeg drie uur de tijd om dit examen op te lossen. Elke vraag stond op één derde van de punten. Op de laatste pagina vind je de eindoplossingen of een tip naar de uitwerking van een aantal vragen.
Zoals je waarschijnlijk wel merkt, focust dit examen vooral op hoofdstuk 4. Dat is bij veel van de examens zo, dus zorg dat je het goed onder de knie hebt!

## 1 Vraag 1

In de reële eindigdimensionale vectorruimte $(\mathbb{R}, V, +)$. Zij $L : V \to V$ een lineaire transformatie met $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ onderling verschillende eigenwaarden met bijbehorende eigenvectoren $v_1, \ldots, v_k$. Bewijs dat de verzameling eigenvectoren $\{v_1, \ldots, v_k\}$ lineair onafhankelijk is. (bewijs stelling 5.18 in de cursus).

## 2 Vraag 2

Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Zij $V$ een rëele vectorruimte. Neem $U_1, U_2, U_3$ deelruimten van $V$, met $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Dan geldt de volgende ongelijkheid:

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_3) + \dim_{\mathbb{R}}(U_2 \cap U_3) \leq \dim_{\mathbb{R}}(U_3) \ .$$

(b) Neem $A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$ met $AB = 0$. Dan geldt dat $(A + B)^2 = A^2 + B^2$

(c) Als $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een symmetrische matrix is en $A^{2021} = 0$, dan is $A = 0$.

## 3 Vraag 3 (Wiskunde/Fysica)

Zij $L : V \to V$ en $K : V \to V$ lineaire transformaties op een reële vectorruimte V. Stel $U_0 = \ker(K)$, $U_1 = \ker(L \circ K)$ en $V_1 = \ker(L)$.

(a) Toon aan dat $U_0$ een deelruimte van $U_1$ is en dat $K(v) \in V_1$ voor alle $v \in U_1$. Concludeer hieruit dat je $K$ kan beperken tot een lineaire afbeeldingen $K_1 : U_1 \to V_1$.

(b) Maak gebruik van $K_1$ om aan te tonen dat

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker K) + \dim_{\mathbb{R}}(\ker L) \geq \dim_{\mathbb{R}}(\ker(L \circ K)) \,.$$

(c) Zij $k \geq 1$ een natuurlijk getal. Definieer $L^k = L \circ L \circ \ldots \circ L$ ($k$ keer). Toon aan dat

$$k \dim_{\mathbb{R}}(\ker L) \geq \dim_{\mathbb{R}}\left(\ker L^k\right) \ .$$

(d) Neem een matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Stel dat er een $k \in \mathbb{N}_0$ bestaat waarvoor dat geldt dat $A^k = 0$. Bewijs de volgende ongelijkheid:

$$\text{Rang } A \leq n\left(1 - \frac{1}{k}\right) .$$

# 4 Eindoplossingen

Deze oplossingen zijn bedoeld als hint naar de eindoplossing. Ze zijn geschreven door studenten en kunnen dus fouten bevatten.

1. **Zie cursus p.222-223** 't Is me inductie. (Ja, toch maar een beetje onnuttige tekst want dan kloppen de nummertjes :) )

2. (a) **Waar.** Neem een basis $\beta = \{v_1, \dots, v_k\}$ voor $U_1 \cap U_3$. Dit is een deelruimte van $U_3$ dus we kunnen deze basis uitbreiden tot een basis voor $U_3$. Dus $\beta_{U_3} = \{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_l\}$ is een basis voor $U_3$. We beweren dan dat $\{w_1, \dots, w_l\}$ de grootst mogelijke basis is voor $U_2 \cap U_3$. Dus
$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_3) + \dim_{\mathbb{R}}(U_2 \cap U_3) \leq \dim_{\mathbb{R}}(U_3) \ .$$

   (b) **Fout.** Men wil testen of je weet dat de matrixvermenigvuldiging niet commutatief is. Er volgt namelijk dat als $AB = 0$ maar $BA \neq 0$, we de gegeven uitdrukking uitwerken
$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)\cdot A + (A+B)\cdot B\\ &= A^2 + BA + AB + B^2\\ &= A^2 + B^2 + BA.\end{aligned}$$
   Neem dus bijvoorbeeld in $\mathbb{R}^{2x2}$
$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$
   Voor deze $A$ en $B$ hebben we $AB = 0$ maar niet $BA = 0$. Bijgevolg is
$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 4 & 1\end{bmatrix},$$
   maar ook
$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}.$$
   Dat is een tegenspraak met de stelling. Ze is dus niet waar.

   (c) **Waar.** Aangezien $A$ symmetrisch is, is $A$ diagonaliseerbaar. Dus er bestaat een inverteerbare $P$ zodat $P^{-1}AP = D$ met $D$ een diagonaalmatrix. We noemen de diagonaalelementen $d_i$ voor $i \in \{1, \dots, n\}$. Aangezien $A^{2021} = 0$, moet $D^{2021} = 0$. Dus geldt $d_i^{2021} = 0$ en dus $d_i = 0$. Bijgevolg is $D = 0$, waaruit je ook kunt concluderen dat $A = 0$.

3. (a) Hier toon je eerst aan dat $U_0 \subset U_1$. Vervolgens ga je het deelruimtecriterium na voor $U_0$ of je argumenteert dit vanuit de definities dat $U_0$ een deelruimte is (i.e. de kern is per definitie een vectorruimte met dezelfde optelling en vermenigvuldiging).

   (b) Pas de dimensiestelling toe op $K_1$. Vervolgens is $\dim(\mathrm{Im}(L))$ een deelruimte van $V_1$, dus $\dim(\mathrm{Im}(L)) \leq \dim(V_1)$. Combineer beide en vind de formule.

   (c) Dit moet je bewijzen met volledige inductie. In de inductiehypothese gebruik je vraag b) en dan zal het wel lukken.

   (d) $A$ stelt na basiskeuze een lineaire afbeelding $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ voor waarop we de stelling van de vraag hierboven kunnen toepassen. Voor die $L$ hebben we dus dat
$$k \dim(\ker L)) \geq \dim(\ker L^k).$$
   In de cursus hebben we bewezen dat $N(A) = \mathrm{co}_\alpha(\ker(L))$ na basiskeuze. Bijgevolg is
$$\dim(\ker L)) = \dim(N(A)).$$
   Neem de vorige twee ongelijkheden samen en vind
$$k \dim(N(A) \geq \dim(\ker L^k).$$

Nu herschrijven we het rechterlid van de ongelijkheid. De nulruimte van $A^k$ gelijk aan de kern van $L^k$ omdat je $k$ keer die afbeelding herhaalt. Ook de dimensies van beide 'dingen' zijn dus gelijk. Bijgevolg is $\dim(\ker L^k) = \dim(N(A)) = n$ want elke vector wordt op 0 afgebeeld. We hebben nu

$$k \dim(N(A)) \geq n. \tag{1}$$

Verder geldt voor elke matrix dat

$$n = \dim(C(A)) + \dim(N(A)) \tag{2}$$

vanwege de dimensiestelling voor lineaire afbeeldingen. Uit de definitie van de rang van $A$ volgt ook

$$\text{rang } A = \dim(C(A)). \tag{3}$$

Neem nu (1), (2) en (3) samen en puzzel een beetje, zodat

$$k(n - \text{rang } A) \geq n$$

ofwel

$$\text{rang } A \leq n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$