Lineaire Algebra

(Januari 2010)

$\boxed{1}$ a) Gegeven is een eindigdimensionale vectorruimte V, voortgebracht door $v_1, v_2 \dots v_r$. Geef en bewijs de manier waarop we dit voortbrengend deel uitdunnen tot een basis van V. Bewijs dit door met matrices te werken, niet de algoritmische manier.

b) Geldt deze stelling ook bij oneindigdimensionale vectorruimten waarbij er oneindig veel eigenvectoren en eigenwaarden zijn? Indien ja of nee: argumenteer.

$\boxed{2}$ Gegeven is een lineaire transformatie $\mathcal{A}$ met gegeven eigenwaarden $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_r$, telkens verschillend van elkaar. Ook de eigenvectoren $v_1, v_2 \dots v_r$ zijn gegeven met telkens de bijhorende eigenwaarde λ_i, voor $i = 1 \dots r$. Bewijs dat deze eigenvectoren lineair onafhankelijk zijn.
Hint: gebruik inductie op r.

$\boxed{3}$ Gegeven is de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$. Volgende gegevens zijn gegeven:

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \text{en} \qquad \mathrm{Im}(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A}).$$

(a) Bepaal de transformatiematrix $\mathrm{M}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ ten opzichte van de standaardbasis

$$\mathcal{E} = \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}.$$

(b) Zouden er basissen $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ bestaan zodat de transformatiematrix $\mathrm{M}_{\mathcal{V},\mathcal{W}}$ is?

$$\mathrm{M}_{\mathcal{V},\mathcal{W}} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 5 & 0 & 0\\0 & 0 & -3 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Als zo'n basissen zouden bestaan, geef er. Bestaan ze niet, argumenteer waarom ze er niet zijn.

$\boxed{4}$ a) Bepaal de formules voor $\cos(\alpha+\beta)$ en $\sin(\alpha+\beta)$ in functie van $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\sin(\beta)$ en $\sin(\beta)$. Bewijs deze formules aan de hand van de rotatiematrix rond het centrum in $\mathbb{R}^2$ ten opzichte van twee keer de standaardbasis $\mathcal{E} = \{(1,0), (0,1)\}$.

b) Voor een vast getal $d \in \mathbb{N}_0$ geldt de lineaire transformatie

$$\mathcal{A}_a : \mathbb{R}[x]_{\leq d} \to \mathbb{R}[x]_{\leq d} : f(x) \mapsto f(x+a).$$

Bepaal de waarden van a waarvoor $\mathcal{A}_a$ diagonaliseerbaar is.

$\boxed{5}$ Gegeven is de matrix A waar $c \in \mathbb{R}$. Bepaal een orthonormale basis van eigenvectoren die geldt voor alle c.

$$A = \begin{pmatrix}10+c & -2+c & 4-2c\\-2+c & 10+c & 4-2c\\4-2c & 4-2c & 4+4c\end{pmatrix}$$

$\boxed{6}$ Gegeven is de vectorruimte $\mathbb{R}^n$ waarin U een lineaire deelruimte is. W is een lineaire deelruimte van U. Bewijs dat

$$U^{\perp_{\mathbb{R}^n}} + W = \left(W^{\perp_U}\right)^{\perp_{\mathbb{R}^n}}.$$

$\boxed{7}$ Gegeven is de lineaire afbeelding $f : V \to W$, waarbij V en W twee eindigdimensionale vectorruimten zijn. Bewijs dat

$$\text{voor alle lineaire afbeeldingen } g : V \to W \text{ geldt dat } \operatorname{rang}(g) \leq \operatorname{rang}(f)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$f \text{ is injectief of surjectief.}$$