Lineaire Algebra

(September 2010)

$\boxed{1}$ Geef en bewijs de dimensiestelling voor een lineaire afbeelding $\mathcal{A} : V \to W$.

$\boxed{2}$

1. Bewijs dat een maximaal vrij deel van een vectorruimte V ook een basis is van V.
2. Zij $\mathcal{A} : V \to V$ een lineaire transformatie. Oordeel of volgende implicaties juist zijn. Leg uit!
   (a) Als $\mathcal{A}$ orthogonaal is, dan is $\mathcal{A}$ inverteerbaar.
   (b) Als $\mathcal{A}$ symmetrisch is, dan is $\mathcal{A}$ inverteerbaar.

$\boxed{3}$ Zij φ een lineaire afbeelding, gegeven door

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (2x + y - z, y - 2z, -2x - z).$$

Gegeven is een lineaire deelverzameling U van $\mathbb{R}^3$, met $U = \langle (0, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle$. Bepaal $\varphi^{-1}(U)$.

$\boxed{4}$ Zij $\varphi : V \to V'$ een lineaire afbeelding. De vectorruimte W is een lineaire deelruimte van V. We weten dat $W = W_1 \oplus W_2$, met W_1 en W_2 deelruimten van V.

1. Bewijs dat wanneer φ injectief is, $\varphi(W) = \varphi(W_1) \oplus \varphi(W_2)$.
2. Geldt de omgekeerde implicatie ook? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.

$\boxed{5}$ Zij $P, N \in \mathbb{R}^{n\times n}$ met P niet de nulmatrix. We weten ook dat $P = NP$ met P een diagonaliseerbare matrix. Bewijs dat N een eigenruimte heeft met als dimensie minstens rang(P).

$\boxed{6}$ Oordeel of volgende uitspraken juist of fout zijn. Bewijs of geen een tegenvoorbeeld.

1. Zij V een n-dimensionale vectorruimte. Voor deelruimten U_i, voor elke i, van V geldt dat $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \cdots \subseteq U_r$. Als nu $r > n + 1$, dan is er een $i \in \{1 \ldots r\}$ waarvoor geldt dat $U_i = U_{i+1}$.
2. Zij V een vectorruimte met basis $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$. We weten dat W een lineaire deelruimte is van V die voortgebracht wordt door $\{e_1, e_2\}$. Dan bestaat er een basis $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$, waarbij $v_1 \notin W$, $v_2 \notin W$ en $v_3 \notin W$.

$\boxed{7}$ Gegeven is de matrix M_a waar $a \in \mathbb{R}$. Bepaal een orthogonale basis van eigenvectoren die geldt voor alle a.

$$M_a = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}$$

We beschouwen als inproduct het standaard inproduct op $\mathbb{R}^3$.