Lineaire Algebra

(27/01/2011 (13u-17.30u))

$\boxed{1}$ (a) Zij W een –eventueel oneindige– deelverzameling van een vectorruimte V. Bewijs dat als W een maximaal vrij deel is van V, dan is W een basis van V.

(b) Zij V en W vectorruimten en $\mathcal{L} : V \to W$ een lineaire afbeelding en $\mathcal{L}(v) = w$. Bewijs dat $\{x \in V | L(x) = w\} = v + \mathrm{Ker}(L)$.

$\boxed{2}$ Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een symmetrische matrix. Bewijs dat A uitsluitend reële eigenwaarden heeft. Met andere woorden dat de karakteristieke veelterm $\varphi(A)$ volledig ontbindt als een product van eerstegraadsfactoren over $\mathbb{R}$.
Hint: Het zou nuttig kunnen zijn om de standaard unitaire ruimte $\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +, \langle\cdot,\cdot\rangle$ met standaard Hermitisch product te gebruiken.

$\boxed{3}$ Beschouw voor alle $n \geq 2$ de lineaire afbeelding $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ met als matrixvoorstelling

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ten opzichte van de standaarbasis $\mathcal{E} = \{(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),(0,0,\ldots,1)\}$ van $\mathbb{R}^n$. We nemen $a_0, \ldots, a_1 \in \mathbb{R}$

(a) Bewijs dat de karakteristieke veelterm

$$\varphi_{\mathcal{A}}(x) = \det\left(X \cdot I_n - M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}\right) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

(b) Bewijs dat voor elke eigenwaarde van L de bijbehorende eigenruimte ééndimensionaal is.

(c) Bewijs dat L diagonaliseerbaar is als en slechts als L precies n verschillende eigenruimten heeft.

$\boxed{4}$ Zijn de volgende uitspraken waar of vals? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

(a) Zij U_1, U_2 en U_3 lineaire deelruimten van een eindigdimensionale reële vectorruimte V.
Veronderstel dat $V = U_1 \oplus U_2$. Dan is $U_2 = (U_3 \cap U_1) \oplus (U_3 \cap U_2)$

(b) Zij U_1 en U_2 lineaire deelruimten van een Euclidische ruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Dan is $U_1^\perp \cap U_2^\perp = (U_1 + U_2)^\perp$.

$\boxed{5}$ Beschouw de lineaire afbeelding

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) &\mapsto (x+y, x+y, x+z). \end{aligned}$$

(a) Bereken de dimensie en basis van $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ en $\mathrm{Im}(\mathcal{A})$.

(b) Bereken basissen $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ van $\mathbb{R}^3$ zo dat

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestaan er basissen $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ van $\mathbb{R}^3$ zo dat

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}?$$

Zo ja, bepaal dan dergelijke V en W. Zo nee, argumenteer waarom niet.

(d) Bestaat er een basis $\mathcal{V}$ van $\mathbb{R}^3$ zo dat $M_{\mathcal{V},\mathcal{V}}$ een diagonaalmatrix is? Argumenteer.

$\boxed{6}$ Beschouw een deelruimte

$$U = \langle (a,b,c), (a,2b,3c), (a,c,c) \rangle$$

van $\mathbb{R}^3$.

(a) Voor welke waarden van de parameters a, b en c is U een strikte deelruimte van $\mathbb{R}^3$? Dus $U \neq \mathbb{R}^3$.

(b) Als $b = c$, geef dan een basis van U naargelang de waarden van de parameters a en b.

(c) Als $b = c$, bepaal dan het orthogonaal complement van U ten opzichte van het standaard inproduct op $\mathbb{R}^3$ naargelang de waarden van de parameters a en b.