EXAMEN LINEAIRE ALGEBRA
maandag 27 augustus 2012

Familienaam: ....
Voornaam: ....
Richting: ....

- Schrijf op elk blad je naam.
- Schrijf netjes en leesbaar, in Nederlandse volzinnen.
- Begin voor elke vraag een nieuw blad. Schrijf 'BLANCO' op het vragenblad vóór de vragen waarop je eventueel geen antwoord weet.
- Geef enkel het net af.
- Overtuig ons ervan dat je begrijpt wat je schrijft.

Veel succes!

---

1. Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en zij U en W deelruimten van V. Bewijs:

$$\dim(U+W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W.$$

Hint: Kies op een doordachte manier basissen van $U \cap W$, U en W.

2. Zij V een eindigdimensionale reële vectorruimte en zij V: $L \to V$ een lineaire transformatie van V. Veronderstel dat $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ onderling verschillende eigenwaarden zijn van V en zij $v_1, v_2, ..., v_r$ eigenvectoren bij respectievelijk $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$. Bewijs dat $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ lineair onafhankelijk is.

Hint: Gebruik inductie op r.

3. Zij A een reële vierkante matrix en zij I de eenheidsmatrix met dezelfde afmetingen. Zij $n > 0$ het kleinste natuurlijk getal zodat er een $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ bestaan zodat

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1A + a_0I = 0$$

Het is niet evident dat A voldoet aan zo'n vergelijking, maar dit moet je niet aantonen.

(a) Toon aan dat A inverteerbaar is als en slechts als $a_0 \neq 0$.

(b) Beschouw de veelterm $f = a_0 + a_1x + ... + a_{n-1}x^{n-1} + x^n \in \mathbb{R}[x]$. Toon aan dat elke eigenwaarde van A een nulpunt is van f.

4. Zij A $\in \mathbb{R}^{m\times n}$. Noteer met L de geïnduceerde afbeelding L: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: x $\mapsto$ Ax en met L^T de afbeelding L^T: $\mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$: x $\mapsto \mathrm{A}^T$x.

   (a) Toon aan dat Ker(L) = $(\mathrm{Im}(\mathrm{L}^T))^\perp$, waarbij we werken met het standaard inproduct.

   (b) Toon aan dat $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{L}^T)) = \dim\,(\mathrm{Im}(\mathrm{L}))$.

5. Zij a een reële parameter. Zij

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2012 \\ 0 \\ a \\ 2011 \\ a-9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

   een deelverzameling van $\mathbb{R}^5$. Dun voor elke waarde van a het deel D uit tot een basis van vct(D).

6. (a) Ga na welke van onderstaande stelsels *i.* en *ii.* dezelfde oplossingsverzameling hebben als het stelsel

$$\begin{cases} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{cases}$$

   voor alle lineaire vergelijkingen R_1, R_2, R_3. Als de oplossingsverzameling altijd hetzelfde is, dan toon je dit aan. Anders geef je een tegenvoorbeeld.

$$i. \begin{cases} R_1 + 2R_2 + R3 \\ R_2 + R_3 \\ R_1 + R_2 \end{cases}$$

$$ii. \begin{cases} R_1 + 3R_2 + R_3 \\ R_2 + R_3 \\ R_1 + R_2 \end{cases}$$

   (b) Toon aan dat

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & bcd \\ 1 & b & b^2 & acd \\ 1 & c & c^2 & abd \\ 1 & d & d^2 & abc \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$