Lineaire Algebra - Januari 2016 - Informatica

1. Veronderstel dat $L : V \to V$ een lineaire transformatie van de eindigdimensionale vectorruimte ($\mathbb{R}$,V,+) is. Bewijs dat voor elke eigenwaarde λ van L de meetkundige multipliciteit van λ kleiner dan of gelijk aan de algebraïsche multipliciteit van λ is. Geef voldoende details.

2. Zij V een euclidische ruimte en $L : V \to V$ een symmetrische lineaire transformatie. Zij v,w $\in$ V eigenvectoren van L met verschillende eigenwaarden. Bewijs dat v$\perp$w.

3. Zijn volgende uitspraken juist of fout? Bewijs je antwoord:

   (a) V is een eindigdimensionale vectorruimte met $L : V \to V$ en $K : V \to V$ diagonaliseerbare lineaire transformaties. Dan zijn L en K gelijk als en slechts als ze dezelfde eigenwaarden en eigenruimtes hebben.

   (b) V is een eindigdimensionale vectorruimte met $L : V \to V$ en $K : V \to V$ lineaire transformaties. Dan zijn L en K gelijk als en slechts als ze dezelfde kern en beeld hebben.

   (c) Zij U de verzameling van lineaire transformaties van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^3$ zodanig dat (1, 2, 3) een eigenvector is. Dan is $U \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$.

4. Beschouw a $\in \mathbb{R}$ en de volgende vectoren in $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 2, -2)\ v_2 = (3, 6, -4)\ v_3 = (0, 1, a^2-1)$$
$$w_1 = (2, -a^2, -1)\ w_2 = (4, 6-2a, 2)\ w_3 = (0, 3, 2)$$

   (a) Voor welke waarden van a zijn v_1, v_2 en v_3 lineair onafhankelijk?
   (b) Voor welke waarde van a is er minstens 1 injectieve lineaire afbeelding $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zodanig dat $F(v_1) = w_1$, $F(v_2) = w_2$ en $F(v_3) = w_3$?
   (c) Voor welke waarde van a is er een unieke injectieve lineaire afbeelding $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zodanig dat $F(v_1) = w_1$, $F(v_2) = w_2$ en $F(v_3) = w_3$?

5. Zij a $\in \mathbb{R}$, beschouw:

$$u = (-3a+1, 2, a-1, 0)\ v = (1, a, 5, 2a+2)$$

   Deelruimte $U = \text{vct}\{u\}$ en deelruimte $V = \text{vct}\{v\}$ van $\mathbb{R}^4$ met het standaard inproduct:

   (a) Bereken $< u, v >$ in functie van a.
   (b) Bepaal de basis en de dimensie van $U^\perp$+V en $U^\perp \cap$V in functie van a.