

Examen Meetkunde II - 11 juni 2024

Dit examen bestond uit een mondeling deel en een schriftelijk deel. Na 1,5 uur moesten we om de beurt het mondelinge deel gaan afleggen. Het examen duurde 4 uur (5 uur en 20 minuten voor studenten met faciliteiten).

Mondeling

1. Beschouw de 4-de graadskromme $C \subseteq \mathbb{C}P^2$, die een 3-voudig punt heeft met slechts 1 hoofdraaklijn. Veronderstel dat X_1 en X_2 buigpunten van C zijn zodat hun verbindingslijn de kromme nog snijdt in twee andere punten Y_1 en Y_2 . Toon aan dat $(X_1, X_2, Y_1, Y_2) \in \{\phi^4, \phi^{-4}\}$ met $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Hint: Je mag veronderstellen dat E_0 het 3-voudig punt is, E_1 en E_2 de buigpunten zijn en E_0E^- de hoofdraaklijn is. Als je uitlegt waarom dit mag, krijg je een bonuspunt.
2. Zij M de eenheidssfeer zonder het punt $(0, 0, 1)$ en σ de stereografische projectie.

- (a) Toon aan dat er een functie $\lambda: M \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ bestaat zodat

$$\forall p \in M, \forall v \in T_p M: \|(\sigma_*)_p v\| = \lambda(p)\|v\|.$$

- (b) Leg uit dat (a) impliceert dat σ conform is.

Schriftelijk

1. Voor $r > 0$ beschouwen we in $\mathbb{E}^2$ de punten $a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$ en c een variabel punt op de cirkel rond a met straal r . Zij C de meetkundige plaats van het hoogtepunt van de driehoek abc .
 - (a) Toon aan dat $C = V(x(x^2 + y^2) - r(x^2 - y^2)) \setminus \{b\}$.
 - (b) Bepaal de asymptoten en de meervoudige punten van C .
 - (c) Schets C en leg uit waar je welke (extra) informatie gebruikt hebt.
2. Zij $x: (\pi/2, \pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3: (u, v) \mapsto (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u + \ln(\tan \frac{u}{2}))$. Zij dan M het beeld van x , dan is M een deel van de pseudosfeer.
 - (a) verifieer dat $K = -1$.
 - (b) Zij c_1 en c_2 twee getallen zodat $\pi/2 < c_1 < c_2 < \pi$. Definieer dan $D := x([c_1, c_2] \times \mathbb{R}) \subseteq M$, dan is D niet enkelvoudig (schets). Zij nu β_1 en β_2 de booglengtegeparametriseerde krommen die D begrenzen in positieve zin ($(J_{\beta_1(s)}\beta_1'(s))$ wijst naar D). Er geldt dat

$$\iint_D K dM + \int_0^{L_1} (\kappa_g)_1(s) ds + \int_0^{L_2} (\kappa_g)_2(s) ds = 0,$$

waarbij $(\kappa_g)_1$ en $(\kappa_g)_2$ de geodetische krommingen zijn van de krommen β_1 en β_2 . Verifieer dit voor M en het gegeven gebied D .