

MEETKUNDE I

(27/01/2011 (9u-14u))

THEORIE

- [1] We hebben een rotatie F in $\mathbb{E}^4$

$$F : \mathbb{E}^4 \rightarrow \mathbb{E}^4 : p \mapsto x_0 + A(x_0 p).$$

1. Toon aan dat $V(F)$ een Euclidische deelruimte is en dat $\dim(V(F)) \in \{0, 2\}$.
 2. Classificeer alle oriëntatiebewarende isometrieën in $\mathbb{E}^4$ en bewijs je stelling.
- [2] Definieer de georiënteerde kromming voor een booglengtegeparametriseerde kromme in $\mathbb{E}^2$ en toon aan dat die kromme een deel is van een cirkel als en slechts als de kromming een constante verschillend van nul is.

OEFENINGEN

- [1] Beschouwen we een driehoek ABC in $\mathbb{E}^2$. De punten P , Q en R zijn de middens van respectievelijk AB , BC en AC . De rechten AL , BM en CN zijn concurrent en snijden de overstaande driehoekszijden in respectievelijk L , M en N . Zij $PM \cap BC = \{H\}$, $QN \cap AC = \{I\}$, en $RL \cap AB = \{J\}$. Toon aan dat H , I en J colineair zijn.
- [2] Beschouwen we het vlak $\pi \leftrightarrow z = 0$. Vind de rechte die loodrecht op dit vlak staat en de volgende 2 rechten snijdt:

$$l \leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

en

$$l' \leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2y - z = 1 \end{cases}$$

Hoeveel rechten voldoen aan deze voorwaarde?

- [3] Zij $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ een booglengtegeparametriseerde, gesloten kromme met lengte L en met strikt positieve kromming. Zij X een eenheidsnormaal vectorveld langs β waarvoor $X(s) \cdot T(s) = 0$, $\|X(s)\| = 1$ en $X(s + L) = X(s)$ voor elke $s \in \mathbb{R}$. Stel nu

$$\text{tw}(\beta, X) := \frac{1}{2\pi} \int_0^L X'(s) \cdot (T(s) \times X(s)) ds.$$

1. Toon aan dat het fractioneel deel van $\text{tw}(\beta, X)$ gelijk is aan het fractioneel deel van $\frac{1}{2\pi} \int_0^L \tau(s) ds$ en dus onafhankelijk van het gekozen eenheidsnormaal vectorveld X . We noemen het fractioneel deel van $\text{tw}(\beta, X)$ de totale twist van β .
Opmerking: Het fractioneel deel van een reëel getal x is het unieke reëel getal $y \in [0, 1[$ zodat $x - y \in \mathbb{Z}$.
2. Toon aan dat als het beeld van β op een sfeer ligt, de totale twist gelijk is aan 0.