Examen Meetkunde I 20.06.2018

Annelien Vekemans

June 21, 2018

1 Theorievragen

Vraag 1

- Zij P_1, P_2, P_3, P_4 vier collineaire punten van $\mathbb{R}P^n$. Definieer de dubbelverhouding van deze punten.
  Bijvraag Waarom is het voldoende een grondsimplex van de rechte door de punten te kiezen en heb je geen projectieve ijk nodig?

- Zij H_1, H_2, H_3, H_4 vier hypervlakken van $\mathbb{R}P^n$ in een bundel. Definieer de dubbelverhouding van deze vlakken.
  Bijvragen Waarom moeten de vlakken tot een bundel behoren? Op welke manier komen hypervlakken overeen met punten in de duale ruimte (zeg dat H $\leftrightarrow$ P(kerα)).

- Zij H_1, H_2, H_3, H_4 vier hypervlakken van $\mathbb{R}P^n$ in een bundel met as P^{n-2} en zij l een rechte die de as niet snijdt. Ga er van uit dat geen drie vlakken gelijk zijn. Formuleer de transversaliteitseigenschap en bewijs deze.
  Bijvragen Waarom moeten de vlakken tot een bundel behoren? Waarom hebben H_3 en H_4 projectieve coördinaten $(1, \lambda_i)$ en niet (λ_j, λ_i)? Waar kan je de transversaliteitseigenschap voor gebruiken? Wat als twee vlakken samenvallen?

Vraag 2

Zij $\beta : I \to \mathbb{E}^2$ een booglengtegeparametriseerde vlakke kromme.

- Geef en bewijs de formules van Frenet.
- Toon aan dat de absolute waarde van de georiënteerde kromming een Euclidische invariant is.
- Toon aan dat als $\beta(s) \cdot \beta'(s) = 0$, β een (deel van een) cirkel is.

2 Oefeningen

Vraag 1

Beschouw de driehoek ΔABC in $\mathbb{A}^2$ en een punt M niet op (het verlengde van) de zijden van de driehoek. Noem $A_1 = AM \cap BC$, $B_1 = BM \cap AC$ en $C_1 = CM \cap AB$. Toon aan dat

$$(M, A_1, A) = (B_1, C, A) + (C_1, B, A)$$

analytisch en synthetisch.

Vraag 2

Zij F de isometrie van $\mathbb{E}^3$ bepaald door

$$F((p_1, p_2, p_3)) = (p_2 - 2, P_3 + 8, -p_1 + 1)$$

Classificeer en bespreek deze isometrie volledig.

Vraag 3

Zij A, A', B, B' vier niet-collineaire punten in $\mathbb{R}P^2$. Toon aan dat A, A', B, B' een projectieve ijk is als en slechts als er een projectieve transformatie f bestaat zodat $f^2 = Id$ en

$$f(A) = A' \qquad f(B) = B'$$

Vraag 4

Hier stond er nog een inleiding over Bertrand-paren (ik denk dat het Bertrand-paren heette, maar dat is niet belangrijk).
Zij α een booglengtegeparametriseerde kromme met $\kappa_\alpha > 0$ en definieer dan $\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} N_\alpha(s)$. Ga er van uit dat $\tau_\alpha \neq 0$.

- Toon aan dat de hoek tussen $\alpha'(s)$ en $\beta'(s)$ constant is voor alle s.
- Bewijs dat er $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bestaan zodat $c_1\kappa_\alpha + c_2\tau_\alpha = 1$.
- Toon aan dat $\tau_\alpha \cdot \tau_\beta$ constant is voor alle s.