# Statistische Mechanica bij Evenwicht

(21/01/2012 (8u30-13u))

$\boxed{1}$ **Mean-fieldoplossing van het Isingmodel.**
De mean-fieldoplossing van het Isingmodel geeft een zelfconsistente vergelijking voor de magnetisatie $m$

$$m = \tanh\left(\beta\left(mz + H\right)\right).$$

Zoek de mean-fieldexponenten $\beta$ en $\delta$ die beschrijven hoe $m$ verdwijnt als $T \to T_c^-$ $(H = 0)$ en als $H \to 0$ $(T = T_C)$.

$\boxed{2}$ **Fermionen.**
Bespreek het gedrag van de Fermidistributie bij lage temperaturen en bij temperatuur nul. Verklaar de betekenis van de Fermi-energie en bereken deze voor een systeem waarbij de energiedistributie $g(\varepsilon)$ constant is. Toon aan dat in zo'n systeem de druk $P$ eindig blijft wanneeer de temperatuur $T$ nul wordt.

$\boxed{3}$ **Bose-Einsteincondensatie in een Harmonische Potentiaal.**
Niet-interagerende bosonen bevinden zich in een tweedimensionale harmonische oscillator met uitwendige potentiaal $V(\vec{q}) = m\omega^2\vec{q}^2/2$.

(a) Geef de energieniveau's van een kwantumdeeltje in de potentiaal, in functie van twee kwantumgetallen $n_x$, $n_y$.

(b) Toon aan dat $N(\varepsilon)$, het aantal kwantumtoestanden met energie kleiner dan $\varepsilon$, wordt gegeven door

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\hbar\omega} - 1\right)^2.$$

*Hint: gebruik een goniometrische constructie in het $n_x, n_y$-vlak.*

(c) Bepaal $g(\varepsilon)$, met $g(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon$ het aantal toestanden in $[\varepsilon, \varepsilon + \mathrm{d}\varepsilon]$.

(d) Toon aan dat er Bose-Einsteincondensatie kan optreden als de temperatuur voldoende laag is. Toon ook aan dat er in één dimensie geen Bose-Einsteincondensatie kan optreden.

(e) Toon aan dat in twee dimensies het aantal deeltjes in de grondtoestand voor temperaturen kleiner dan $T_c$ gelijk is aan

$$\frac{N_0(T)}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2.$$

$\boxed{4}$ **Klassiek model van moleculen.**
Beschouw een systeem van $N$ niet-interagerende moleculen, bestaande uit twee atomen met massa $m_1$ en $m_2$. De moleculen bevinden zich in een volume $V$ op een temperatuur $T$. De Hamiltoniaan voor een molecuul is gegeven door

$$\mathcal{H}_{\text{klas}} = \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} + \Phi\left(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|\right),$$

met $\vec{p}_1$ en $\vec{p}_2$ de impuls van de atomen van het molecuul, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ de plaatsvectoren van de atomen van het molecuul en $\Phi$ een interatiepotentiaal.
Bereken in de klassieke statistische mechanica

(a) de totale kinetische energie van het systeem,

(b) de druk $P(N, V, T)$ in het systeem in functie van $N$, $V$ en $T$.

◇ ◇ ◇