

STATISTISCHE MECHANICA BIJ EVENWICHT

(03/09/2012 (14u-18u))

1 Microcanonisch en canonisch ensemble.

Leid de canonische dichtheidsfunctie $\rho_{\text{can}}(\Gamma)$ uit de microcanonische dichtheidsfunctie af:

$$\rho_{\text{mic}}(\Gamma) = \frac{\delta(E - H(\Gamma))}{N! h^{3N}}.$$

In het microcanonisch ensemble zijn E , V en N vast. In het canonisch ensemble kan E fluctueren, maar die fluctuaties zijn relatief klein in de limiet $N \rightarrow +\infty$. Leg dit uit!

2 Van der Waalsvergelijking.

De vergelijking van Van der Waals is

$$p = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - \frac{aV^2}{2N^2}.$$

Toon aan hoe deze afgeleid kan worden en leg de betekenis van de coëfficiënten a en b uit.

3 Kwantumstatistische mechanica.

Beschouw een systeem van twee niet-wisselwerkende kwantumdeeltjes die zich in drie verschillende toestanden kunnen bevinden. Een toestand met energie 0 en twee ontaarde toestanden met elk energie $\varepsilon > 0$. De twee deeltjes zijn in evenwicht bij temperatuur T .

- (a) Geef alle toestanden van de twee deeltjes in de Bose-Einsteinstatistiek en in de Fermi-Diracstatistiek.
- (b) Bereken in het canonisch ensemble de toestandssom in de twee bovenstaande gevallen.
- (c) Bereken de inwendige energie van de twee situaties en bespreek telkens de limiet $T \rightarrow 0$.

4 Ideaal bosegas met potentiaalput.

Een ideaal gas van bosonen bevindt zich in een vat met volume V . Bovendien er bevinden zich, in de wand op grote afstanden van mekaar, M “potentiaalputten” in het vat. Binnen elke put is er plaats voor één gebonden boson met energie $-\chi$

- (a) Toon aan dat de grootcanonische toestandssom gegeven is door

$$\log \Xi = -M \log \left(1 - e^{\beta(\mu + \chi)} \right) - \sum_{\nu=0}^{\infty} \log \left(1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_{\nu})} \right).$$

- (b) Vervang de som in bovenstaande uitdrukking door een integraal door gebruik te maken van de toestandsdichtheid $\rho(\varepsilon)$. Toon aan dat $\rho(\varepsilon) \sim \sqrt{\varepsilon}$ en bereken de evenredigheidscoëfficiënt.
- (c) Geef een uitdrukking voor de verwachte energie en druk in termen van $\rho(\varepsilon)$.
- (d) Doe hetzelfde voor het gemiddelde aantal gebonden deeltjes $\langle N_{\chi} \rangle$ en schets dit aantal in functie van $\beta\chi$.
- (e) Bereken bij welke dichtheid van de niet gebonden deeltjes er Bose-Einsteincondensatie optreedt.

◇ ◇ ◇