Examen Algebra I 2021-2022

Maandag 17 Januari 2022

16:00 - 20:00

Door covid duurde het examen 4 uur, waarvan maximaal 90 minuten voor het theoriedeel gebruikt mochten worden.

1 Theorie (gesloten boek)[1]

Vraag 1

Zij F een eindig veld.

(i) Bewijs dat het aantal elementen van F een macht van een priemgetal is.
Hint: Denk aan het priemdeelveld.

(ii) Bewijs dat F een ontbindingsveld is (van een veelterm van de vorm $X^? - X$ over ... (aanvullen)).

Ten slotte: geef een concreet voorbeeld van F_{27} in de vorm van een concrete quotiëntenring.

Vraag 2

(a) Stel dat R een commutatieve ring is met eenheidselement. Toon aan dat een maximaal ideaal ook een priemideaal is.

(b) Zij $V, \langle \cdot, \cdot \rangle$ een hermitische inproductruimte en zij $A \in \mathrm{Hom}(V, V)$ zodat A^* bestaat. Toon aan dat $(A^*)^* = A$.

[1] Gewoon een paar stellingen uit het boek bewijzen, namelijk 3.2.4, 3.5.4, 2.2.22 en 4.5.13(4).

2 Oefeningengedeelte (open boek)

Vraag 1

Zij G een (eindige) groep. Stel dat een er normaaldeler N van G bestaat die isomorf is met $\mathbb{Z}_n$ ($n \geq 2$) en zodat $G/N \cong \mathbb{Z}_2$.

(a) Toon aan dat $G = \mathbb{Z}_{2n}$ en $G = D_n$ (de Diëdergroep) aan deze voorwaarden voldoen

(b) Stel dat $a \in N$ een generator is van N en dat $b \notin N$. Bewijs dat elk element in G geschreven kan worden als $a^i b^j$, met $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ en $j \in \{0, 1\}$. Toon ook aan dat $b^2 \in N$.

(c) Stel dat n een priemgetal is. Als $b^2 = a^i$, met $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, toon aan dat G cyclisch is van orde $2n$ en voortgebracht wordt door b.

Vraag 2

Stel dat R een commutatieve ring is met eenheidselement. Een element $e \in R$ noemt men *idempotent* als $e^2 = e$.

(a) Stel dat $e \in R$ idempotent is. Toon aan dat $1 - e$ ook idempotent is en dat $e(1 - e) = 0$.

(b) Stel $R = R_1 \oplus R_2$ een directe som is van twee willekeurige ringen R_1 en R_2, beiden niet de nulring. Geef een idempotent element $e \neq 0, 1$ in R.

(c) Stel omgekeerd dat $e \neq 0, 1$ idempotent is. Bewijs dat het morfisme

$$f : R \to \frac{R}{(e)} \oplus \frac{R}{(1-e)} : x \mapsto (x + (e), x + (1-e))$$

een isomorfisme is.

Vraag 3

Definieer $\alpha = i\sqrt{\sqrt{5} + \sqrt{6}} \in \mathbb{C}$.

(a) bereken $\alpha^2, \alpha^4, \alpha^6$ en bewijs dat $\sqrt{5}, \sqrt{6}$ en $\sqrt{30}$ elementen zijn van $\mathbb{Q}(\alpha)$.

(b) bepaal $\left[\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{6}) : \mathbb{Q}\right]$ en $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$.

(c) Bepaal de minimale veelterm van α over $\mathbb{Q}$.

Vraag 4

Zij G een groep zodat elk element een eindige orde heeft en zij $f : G \to GL_n(\mathbb{C})$ een groepsmorfisme.

(a) Bewijs dat $f(g)$ diagonaliseerbaar is voor alle $g \in G$ door te kijken naar de minimale veelterm van $f(g)$.

(b) Stel dat G eindig is van oneven orde en dat alle eigenwaarden van $f(g)$ in $\mathbb{R}$ zitten. Toon aan dat $f(g) = I_n$ voor alle $g \in G$.