

Examen Algebra I

22 januari 2021

Er was nog steeds corona dus beide delen van het examen waren open boek.

1 Theorie (6pt)

Vraag 1

Bewijs eigenschap 1.3.6 uit de cursus.

Vraag 2

Zij $K \subsetneq L \subsetneq M$ velduitbreidingen en $u \in M$. Waar of niet?

- a) Als u algebraïsch over L , dan is u ook algebraïsch over K .
- b) Als u algebraïsch over K , dan is u ook algebraïsch over L .

Geef ofwel een tegenvoorbeeld ofwel een kort bewijs dat enkel de definitie van algebraïsch gebruikt.

2 Oefeningen (14pt)

Vraag 3

We zeggen dat een groep $G, \cdot$ nilpotent is als er een keten van deelgroepen

$$\{e_G\} = H_k \subsetneq H_{k-1} \subsetneq \cdots \subsetneq H_1 \subsetneq H_0 = G$$

bestaat zodat

- i) $H_i \triangleleft G$ voor $i = 0, \dots, k$ en
- ii) $H_i/H_{i+1} \subseteq Z(G/H_{i+1})$ voor $i = 0, \dots, k-1$.

Toon in elk van de volgende gevallen aan dat $G, \cdot$ nilpotent is.

- a) Zij $G, \cdot$ een commutatieve groep.
- b) Zij G een willekeurige groep. Zij N een normale deelgroep van G zodat $N \subseteq Z(G)$ en zodat G/N nilpotent is.
- c) Zij p een priemgetal en $G, \cdot$ een p -groep. *Hint: je kan (b) gebruiken.*

Vraag 4

Met welk 'gekend' veld is

$$F = \frac{\mathbb{Z}_7[X, Y]}{(Y - 2X^2, 4XY + Y + 1)}$$

isomorf? Bewijs zorgvuldig.

Vraag 5

Zij $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ de matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 4 & -8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bepaal een inverteerbare matrix P en de Jordenvorm J zodat $J = P^{-1}AP$. Bepaal ook de minimale veelterm van A .

Je mag gebruiken dat:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & -8 & 16 & -32 & 4 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 16 & -32 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 12 & -24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$