Algebra I

15 januari 2015

Theorie

$\boxed{1}$ *(Schriftelijk)* Zij $G, \cdot$ een groep. Zij A en B deelgroepen van G. Bewijs:

$$AB = BA \Leftrightarrow AB \text{ is een deelgroep van } G.$$

$\boxed{2}$ *(Schriftelijk)* Zij $R, +, \cdot$ een ring. Zij I een deelring van R. Bewijs dat de afbeelding $\bar{\cdot} : R/I \times R/I \to R/I : (\bar{x}, \bar{y}) \mapsto \overline{x \cdot y}$ goed gedefinieerd is als en slechts als I een ideaal is.

$\boxed{3}$ *(Mondeling)* Beschouw de veld uitbreidingen $K \subset L \subset E$. Stel dat L algebraïsch is over K en E algebraïsch over L. Bewijs dat E algebraïsch is over K.
Hint: Beschouw een geschikte keten van velduitbreidingen

Bijvraagjes tijdens het mondeling gedeelte zoals : Bestaan er eindige algebraïsch gesloten velden? Bestaat er een transcendente uitbreiding van $\mathbb{C}$ (zo ja, geef er één)? Geef alle commutatieve cyclische groepen van orde 16. Geef een niet commutatieve groep van orde 16...

Oefeningen

$\boxed{1}$ Zij $G, \cdot$ een commutatieve groep. Zij $G_n := \{g \in G | g^n = e\}$ en $G^n := \{g^n | g \in G\}$. Zijn de volgende beweringen waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

a) G^n en G_n zijn deelgroepen van G
b) $G/G^n \cong G_n$
c) $G/G_n \cong G^n$

$\boxed{2}$ Zij I een ideaal van een groep G en $\sqrt{I} := \{g \in G | g^n \in I \text{ voor een zekere } n \in \mathbb{N}_0\}$.

a) Bewijs dat $\sqrt{I}$ een ideaal is.
b) Beschouw een element $x \in G$. Wat is $\sqrt{(x)}$?

$\boxed{3}$ Beschouw de structuur $\dfrac{\mathbb{Z}_3[T]}{(T^2 + 2T + 2)}$.

a) Bewijs dat deze structuur een veld is. Met welk bekend veld is het isomorf?
b) [Er worden twee veeltermen gegeven] Beschouw ontbindingsvelden voor deze veeltermen. Wat is de uitbreidingsgraad? [Nog een paar bijvraagjes die ik vergeten ben]

$\boxed{4}$ [Een matrix $A \in \mathbb{C}^{6\times 6}$ wordt gegeven. Je moet deze matrix in Jordanvorm brengen. Je moet ook de minimale veelterm van A geven en de matrix P zodat $AP = PJ$ met J de Jordan matrix. Bij deze vraag verlies je <u>**enorm**</u> veel tijd als je niet goed weet hoe je het moet aanpakken. Zorg er dus voor dat je dit goed kan, en maak dus zeker voldoende oefeningen over Jordanvormen.]