

Examen Algebraïsche Structuren

23 juni 2021

In dit examen was het theorie-gedeelte *gesloten boek*. Dit deel stond op 20 van de 60 punten. Na dat je hiermee klaar was mocht je beginnen aan de oefeningen. Dit is *open boek*. De oefeningen staan op 50 punten, maar hier tellen er maar 40 van mee (dus 10 punten zijn 'bonus').

Bijvoorbeeld: als je 15/20 hebt op theorie, en 35/50 op oefeningen, wordt dit $15/20 + 35/40 = 50/60$

In totaal hadden wij 3 uur de tijd om dit examen te maken. Er werd aangeraden om niet langer dan 1 uur bezig te zijn met de theorie.

Theorie

Vraag 1 (10p). Zij p, q onderling ondeelbare natuurlijke getallen. Zij a, b gehele getallen.

- (a) (7p) Bewijs dat het stelsel

$$x \equiv a \pmod{p}, \quad x \equiv b \pmod{q}$$

een gehele oplossing heeft.

- (b) (3p) Wat kan je zeggen over de uniciteit van zo'n oplossing, en waarom?

Vraag 2 (10p).

- (a) (2p) Definieer het begrip congruentie van vierkante matrices over $\mathbb{R}$.
- (b) (4p) Formuleer een criterium dat aangeeft wanneer gegeven symmetrische matrices over $\mathbb{R}$ congruent zijn met elkaar; leg ook de begrippen uit die je nodig hebt om dit criterium te kunnen formuleren.
- (c) (4p) Hoeveel congruentieklassen van symmetrische (3×3) -matrices over $\mathbb{R}$ bestaan er, en waarom?

Oefeningen

Vraag 3 (20p). Zij K een veld. Zij V een eindigdimensionale vectorruimte over K , met duale ruimte V^* . Zij $W = V \oplus V^*$. Definieer

$$\varphi : W \times W \rightarrow K : ((v_1, l_1), (v_2, l_2)) \mapsto l_2(v_1) - l_1(v_2)$$

- (a) (6p) Toon aan dat φ een bilineaire vorm is.
- (b) (3p) Verifieer dat de bilineaire vorm φ *anti-symmetrisch* is, of nog:

$$\varphi(w_1, w_2) = -\varphi(w_2, w_1) \quad \text{voor alle } w_1, w_2 \in W$$

Wat kun je hieruit concluderen over de Gram-matrix van φ ten opzichte van een willekeurige basis van W ?

- (c) (5p) Toon aan dat de bilineaire vorm φ niet-ontaard is.
- (d) (6p) Zij $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ een basis voor V , en $\mathcal{V}^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_n^*\}$ een duale basis voor V^* . Dan is

$$\mathcal{W} = \{(v_1, 0), (v_2, 0), \dots, (v_n, 0), (0, v_1^*), (0, v_2^*), \dots, (0, v_n^*)\}$$

een basis voor W . Bepaal de Gram-matrix van φ ten opzichte van $\mathcal{W}$

Vraag 4 (15p).

- (a) (2p) Bepaal de orde van de groep $G = \mathbb{Z}_{20}^\times$.
- (b) (6p) Toon aan dat $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow G : (m, n) \mapsto [11]_{20}^m \cdot [13]_{20}^n$ een surjectief homomorfisme van groepen is.
- (c) (4p) Toon aan dat de kern van f gelijk is aan $2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z}$. (*Hint: begin met de eenvoudigere inclusie $2\mathbb{Z} \times 4\mathbb{Z} \subseteq \ker f$*)
- (d) (3p) Bewijs tenslotte dat $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ door gebruik te maken van de eerste isomorfismestelling.

Vraag 5 (15p).

- (a) (3p) Zij G een groep zodat voor alle $x, y \in G$ geldt dat $(xy)^2 = x^2y^2$. Toon aan dat G noodzakelijk commutatief is.
- (b) We tonen nu aan dat uit de alternatieve eis dat $(xy)^3 = x^3y^3$ voor alle elementen x, y van een groep G *niet* altijd volgt dat G commutatief is. Bekijk daarvoor de volgende verzameling van (3×3) -matrices over het veld $\mathbb{Z}_3$ met 3 elementen:

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha & \beta \\ \bar{0} & \bar{1} & \gamma \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_3 \right\};$$

hierbij is $\bar{0} = [0]_3$ en $\bar{1} = [1]_3$.

- (b1) (5p) Bewijs in detail dat $\mathcal{H}_3$ een groep is voor de matrixvermenigvuldiging.
- (b2) (1p) Geef (zonder verantwoording) de orde van deze eindige groep.
- (b3) (2p) Toon vervolgens aan dat $\mathcal{H}_3$ niet commutatief is.
- (b4) (4p) Bewijs tenslotte dat $(xy)^3 = x^3y^3$ voor alle $x, y \in \mathcal{H}_3$.