

Examen algebruh

Uw mama

Om oude examens te volgen: Zeer lit lit, zeer dab dab

January 13 2025

Theorie

Vraag 1

Zij $R, +, \cdot$ een integriteitsdomein. Stel dat $I \triangleleft R$ een maximaal ideaal is. Toon aan dat R/I een veld is.

Vraag 2

Zij $K \subset E$ een velduitbreiding en $a, b \in E$. Zijn volgende uitspraken waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

- a) Als a en b algebraïsch zijn over K , dan is $a + b$ algebraïsch over K .
- b) Als a en b transcendent zijn over K , dan is $a + b$ transcendent over K .

Vraag 3

Zij V een eindigdimensionale complexe inproductruimte. Zij A een lineaire transformatie van V . Stel dat V een orthonormale basis van eigenvectoren van A heeft. Toon aan dat A normaal is.

Oefeningen

Vraag 1

Zij $G, \cdot$ een groep. We definiëren dan de groep $G \oplus G, *$ als de groep van het cartesisch product van G met zichzelf en componentsgewijze vermenigvuldiging als groepsbewerking. We definiëren nu

$$D := \{(g, g) \mid g \in G\}$$

- a) Toon aan dat D een deelgroep is van $G \oplus G$.
- b) Toon aan dat D een normaaldeeler is van $G \oplus G$ als en slechts als G commutatief is.
- c) Neem aan dat G commutatief is. Met welke groep is dan $\frac{G \oplus G}{D}$ isomorf?

Vraag 2

Zij $R, +, \cdot$ een ring. We noemen R Artins als elke keten $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ stabiliseert, d.w.z. $\exists N \in \mathbb{N} : I_N = I_n$ voor alle $n \geq N$.

- a) Toon aan dat $\mathbb{Z}, +, \cdot$ geen Artinse ring is.
- b) Zij $R, +, \cdot$ een domein. Toon aan dat R ook een Artinse ring is als en slechts als R een veld is.
- c) Toon nu aan dat elk eindig domein ook een veld is.

Vraag 3

Beschouw $K = \mathbb{Q}(\sqrt{1 + i\sqrt{2025}})$.

- a) Bepaal de minimale veelterm f van $\sqrt{1 + i\sqrt{2025}}$ over $\mathbb{Q}$, en geef $[K : \mathbb{Q}]$. Werk zorgvuldig uit.
- b) Noem E het ontbindingsveld van f over $\mathbb{Q}$. Vind alle wortels van f in E , en besluit dat $E = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, waarbij α en β goedgekozen wortels van f zijn.

Vraag 4

Zij $A \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$. De karakteristieke veelterm van A is $(X - 1)^2(X - \lambda)^2$, en de minimale veelterm ervan is $\phi_A = (X - 1)^a(X - \lambda)$ waarbij $a = \{1, 2\}$ en $\lambda \in \mathbb{C}$. Bespreek de mogelijke Jordanmatrices van A in functie van λ en a .

Oplossingen

Theorievragen

Vraag 1

Proof. We kunnen dit redelijk elegant aantonen via contrapositie. Neem aan dat R/I geen veld is. Dan is er een $\bar{x} \in R/I$ zodat voor alle $\bar{y} \in R/I$ geldt dat $\bar{x}\bar{y} \neq \bar{1}$ en $\bar{x} \neq \bar{0}$. Dus is $J = \{i + r \cdot x \mid r \in R, i \in I\} \triangleleft R$ en $J \subsetneq R$. Als immers $J = R$, dan is $1 \in J$, zodat $rx - 1 = -i \in I$, zodat $\bar{r}\bar{x} = \bar{1}$, wat een contradictie is. Dus is nu $I \subsetneq J \subsetneq R$ en is I geen maximaal ideaal is. $\square$

Vraag 2

a) Dit is waar

Proof. Dit bewijs staat letterlijk in de cursus, zie stelling 3.3.7 op pagina 118. Het bewijs gaat als volgt:

Beschouw de velduitbreidingen $F \subset F(a) \subset F(a)(b) = F(a, b)$. Nu zijn $[F(a) : F], [F(b) : F] < +\infty$. Duidelijk zal nu ook $[F(a)(b) : F(a)] < +\infty$, want de minimale van b over F is ook een veelterm in $F(a)[X]$, dus is b algebraïsch over $F(a)$, wat equivalent is met de eindigheid van $[F(a)(b) : F(a)]$. Nu zegt de productformule ons dat $F \subset F(a, b)$ ook een eindige velduitbreiding is. De oplettende lezer heeft ondertussen bemerkt dat $a + b \in F(a, b)$, zodat $F \subset F(a + b) \subset F(a, b)$. Door de eindigheid van de velduitbreiding $F(a, b)$ is nu ook $F(a + b)$ een eindige velduitbreiding zodat $a + b$ algebraïsch is over F . $\square$

b) Dit is mooi niet waar.

Proof. We mogen zonder bewijs gebruiken dat π transcendent is over $\mathbb{Q}$. Dit betekent meteen ook dat $-\pi$ transcendent is over $\mathbb{Q}$, wat eenvoudig gecontroleerd kan worden door een bewijs via contradictie. Als immers $f(-\pi) = 0$ voor een $f \in \mathbb{Q}[X]$, dan kunnen we X vervangen door $-X$ in f om een veelterm te bekomen waar π een wortel is. Maarja, dat kan dus niet. We hebben nu twee transcendent getallen, π en $-\pi$. Je kan nu hopelijk inzien dat $\pi + (-\pi) = 0 \in \mathbb{Q}$ niet bepaald transcendent is. $\square$

Vraag 3

Afkortingen (want ik ben lui)

- Orthonormale basis: ONB
- Eigenwaarde: EW
- Eigenvector: EV

Proof. Zij $\beta = \{e_1, \dots, e_n\}$ een ONB van EV van A voor V met $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de overeenkomstige EW. Door de eindigheid van $\dim V$ heeft A een adjunct A^* . Neem $v \in V$. Dan $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ zodat $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. We gebruiken nu dat alle EV van A ook EV zijn van A^* met EW $\bar{\lambda}_i$. Dus is $A(A^*(v)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |\lambda_i|^2 e_i = A^*(A(v))$ (als dit niet duidelijk is kan je dit narekenen door gebruik te maken van de lineariteit van A en A^*).
Nu is dus $A^* \circ A = A \circ A^*$ $\square$

Oefeningen

Vraag 1

a)

Proof. Bemerkt eerst dat $D \neq \emptyset$, want $(e_G, e_G) \in D$. Neem $(a, a), (b, b) \in D$. Dan is $(a, a)^{-1} = (a^{-1}, a^{-1}) \in D$. Hiernaast is $(a, a) * (b, b) = (ab, ab) \in D$. Dus gebruiken we het deelgroepencriterium en concluderen we dat D inderdaad een deelgroep is van $G \oplus G$. $\square$

b)

Proof. Neem aan dat D een normaaldeler is. Dan is $\frac{G \oplus G}{D}$ een goed gedefiniëerde groep. Bemerkt nu dat er voor alle $a, b \in G$ geldt dat $(a^{-1}, b) = (a^{-1}, a^{-1}) * (e_G, ab) = (e_G, ba) * (a^{-1}, a^{-1})$. Dus is $(e_G, ab) = (e_G, ba)$. Doordat $\frac{G \oplus G}{D}$ effectief een groep is, is nu $(e_G, (ba)^{-1}ab) \in D$, wat betekent dat $(ba)^{-1}ab = e_G$. Dus is $ba = ab$ en is G commutatief.

Neem nu aan dat G commutatief is. Dan is $G \oplus G$ ook commutatief. Aangezien D nu een deelgroep is van een commutatieve groep is het een normaaldeler, want elke normaaldeler van een abelse groep is een normaaldeler. $\square$

c)

Proof. Het antwoord is $\frac{G \oplus G}{D} \cong G$. Zij $\varphi : G \oplus G \rightarrow G : (a, b) \mapsto ab^{-1}$. Dit is een morfisme, $\varphi((a, b) * (c, d)) = ac(bd)^{-1} = ab^{-1}cd^{-1} = \varphi((a, b))\varphi((c, d))$ door de commutativiteit van G . Bemerkt nu dat als $ab^{-1} = e_G$ dat het dan nogal duidelijk is dat $b = a$ door de uniciteit van inverse elementen in een groep. Dus is $D = \ker \varphi$. De surjectiviteit van φ is niet zo interessant, $\varphi((a, e_G)) = a$ voor alle $a \in G$. Nu geeft de eerste isomorfismestelling ons precies wat we wouden bewijzen. $\square$

Vraag 2

a)

Proof. Neem de idealen voortgebracht door de machten van 2. Dan is $I_n = 2^n \mathbb{Z}$. Dan geldt er dat $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$. Deze keten van idealen stabiliseert echter niet, immers zal $2^n \notin 2^{n+1} \mathbb{Z}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, zodat er nooit een gelijkheid van idealen kan optreden. $\square$

b)

Proof. Neem eerst aan dat R een veld is. Dan heeft R precies twee idealen, namelijk het nulideaal en R zelf. Dus is het nogal evident dat elke dalende keten van idealen moet stabiliseren, ofwel is die immers heel de tijd R , of wordt (en blijft) die ooit het nulideaal.

Neem nu aan dat R een Artinse ring is. Door de aanname gemaakt in de opdracht dat R een domein is, is R al zeker commutatief en heeft het een eenheidselement. Neem nu $r \in R \setminus \{0\}$ willekeurig. Beschouw nu de keten van idealen $I_n = (r^n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dit is zeker een dalende keten, want $r^{n+1} = r \cdot r^n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, waaruit de gewenste inclusie meteen volgt. Nu moet deze keten echter stabiliseren, er is dus een $N \in \mathbb{N}$ zodat $(r^N) = (r^{N+1})$. Gevolg 2.4.3 (pg. 87 in de cursus) zegt ons nu dat r^N en r^{N+1} geassocieerd zijn. Dus is er een $u \in R^\times$ zodat $ur^N = r^{N+1}$. Doordat R een domein is en $r \neq 0$ mogen we nu schrappen om te concluderen dat $u = r$, zodat $r \in R^\times$. We hebben echter $r \in R \setminus \{0\}$ willekeurig genomen. Doordat er altijd geldt dat $R^\times \subset R \setminus \{0\}$ kunnen we nu concluderen dat $R^\times = R \setminus \{0\}$, zodat R inderdaad een veld is. $\square$

c)

Proof. Neem een keten idealen $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ in R . Door de eindigheid van R moet deze keten stabiliseren, anders zouden we oneindig vaak minstens 1 element kwijtspelen, wat simpelweg niet kan, je kan niet oneindig veel van een eindig iets weggooien. Dus is R Artins en bijgevolg een veld door de vorige deeloefening. $\square$

Vraag 3

Bemerk bij deze vraag dat $\sqrt{2025} = 45$. Dit is geen probleem voor deze oefening, maar wel gemeen dat het niet mee op het examen stond. Conclusie: concludeer altijd een keertje ofdat de gegeven wortel wel echt irrationaal is. We noteren uit luiheid trouwens $\alpha = \sqrt{1 + i\sqrt{2025}}$

a)

Proof. Voor de minimale veelterm f moet al zeker $f(\alpha) = 0$. We zoeken dus een veelterm zodat $X = \alpha$ een oplossing is. Dan zal $X^2 - 1 = i\sqrt{2025}$, zodat de veelterm $g = X^4 - 2X^2 + 2026$ een mogelijkheid is. Bemerk nu dat $2 \nmid 1$, $2 \mid (-2) \cdot 2026$ en $4 \nmid 2026$, zodat g irreducibel is door het criterium van Eisenstein. Door eigenschap 3.2.16 in de cursus is g dan ook meteen de minimale van α , zodat $[K : \mathbb{Q}] = 4$ door de structuurstelling voor enkelvoudige velduitbreidingen. $\square$

b)

Proof. We kunnen uit de constructie van g in de vorige deeloefening zien dat de wortels van g in $\mathbb{C}$ precies $\pm\sqrt{1 \pm i\sqrt{2025}}$ zijn. We kunnen nu dus duidelijk

$\alpha, \beta = \sqrt{1 \pm i\sqrt{2025}}$ nemen, aangezien de negatieve wortels niet nodig zijn om $E = \mathbb{Q}(\pm\sqrt{1 \pm i\sqrt{2025}})$ voort te brengen. $\square$

Vraag 4

Vergeet hier zeker $\lambda = 1$ niet als geval!

Proof. **Geval 1)** Veronderstel dat $a = 1, \lambda \neq 1$. De minimale is nu een product van eerstegraads factoren, zodat A diagonaliseerbaar is. De Jordanmatrix van onze matrix is dus

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Geval 2) Veronderstel dat $a = 2, \lambda \neq 1$. Dan is het invariant systeem van $A - I$ beperkt tot Eig_1 gegeven door $\{2\}$. Aangezien we weten dat $E_\lambda = \text{Eig}_\lambda$ is de Jordanmatrix van A nu gegeven door

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Geval 3) Veronderstel dat $a = 1, \lambda = 1$. Dan is $A - I$ nilpotent van index 2. De mogelijke invariante systemen zijn dus $\{2, 1, 1\}$ en $\{2, 2\}$. De overeenkomstige Jordanmatrices zijn dan

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Geval 4) Veronderstel dat $a = 2, \lambda = 1$. Dan is $A - I$ nilpotent van index 3, dus vinden we als invariant systeem $\{3, 1\}$, zodat de Jordanmatrix van A gegeven wordt door

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

Dat was het dan, op naar het volgende oud examen en veel succes met het echte examen!