

Examen Analyse II 16 januari 2017

Je kreeg 4u tijd (inclusief mondeling gedeelte).

Vraag 1

Op p.153 staat "Helemaal analoog als in het bewijs van stelling 4.38 volgt dat

$$\int_{\mathbb{R}} \|f_y - f\|_1 \check{g}_A(y) dy \rightarrow 0$$

als $A \rightarrow +\infty$ ". Bewijs deze uitspraak nauwkeurig.

Vraag 2

- Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ zodat

$$(\partial_1 f)(0,0) = 1, (\partial_2 f)(0,0) = 1$$

maar f niet totaal afleidbaar in $(0,0)$.

- Zij $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, +\infty)$ en $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ totaal afleidbare functies. Toon nauwkeurig aan dat

$$f(x)^{g(x)}$$

ook totaal afleidbaar is.

Vraag 3

Bereken de voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$ de volgende limiet

$$\lim_{\delta \xrightarrow{>} 0} \int_0^2 \frac{1-x}{\delta + x^\alpha} dx$$

Bewijs je antwoord nauwkeurig.

Vraag 4

Voor welke waarden van $\alpha, \beta > 0$ is de functie

$$f : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^\alpha(1+x^2+y^2)^\beta}$$

integreerbaar? Bewijs nauwkeurig.

Vraag 5

Zij $L^2([0, 2\pi])$ de Hilbertruimte van 2π -periodische functies die kwadratisch integreerbaar zijn over één periode. Zij K de deelruimte van $L^2([0, 2\pi])$ zodat voor alle $f \in K$ geldt dat $f(x + \omega) = f(x)$ voor alle $\omega \in \mathbb{R}$.

- Welke Fouriercoëfficiënten kunnen deze functies hebben? M.a.w. bepaal de deelruimte

$$\{(\hat{f}_k)_{k \in \mathbb{Z}} \mid f \in K\} \subset \ell^2(\mathbb{Z})$$

volledig.

- Bereken $K^\perp$. Bewijs je antwoord nauwkeurig.
- Vind een orthonormale basis voor K en bewijs je antwoord nauwkeurig.