Examen Analyse II 16 januari 2017

Je kreeg 4u tijd (inclusief mondeling gedeelte).

Vraag 1

Op p.153 staat "Helemaal analoog als in het bewijs van stelling 4.38 volgt dat

$$\int_{\mathbb{R}} \|f_y - f\|_1 \, \breve{g}_A(y) \, dy \to 0$$

als $A \to +\infty$". Bewijs deze uitspraak nauwkeurig.

Vraag 2

- Geef een voorbeeld van een functie $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ zodat

  $$(\partial_1 f)(0,0) = 1, (\partial_2 f)(0,0) = 1$$

  maar f niet totaal afleidbaar in $(0,0)$.
- Zij $f : \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ en $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ totaal afleidbare functies. Toon nauwkeurig aan dat

  $$f(x)^{g(x)}$$

  ook totaal afleidbaar is.

Vraag 3

Bereken de voor alle $\alpha \in \mathbb{R}$ de volgende limiet

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ >}} \int_0^2 \frac{1-x}{\delta + x^\alpha} dx$$

Bewijs je antwoord nauwkeurig.

Vraag 4

Voor welke waarden van $\alpha, \beta > 0$ is de functie

$$f : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{1}{x^\alpha (1 + x^2 + y^2)^\beta}$$

integreerbaar? Bewijs nauwkeurig.

Vraag 5

Zij $L^2([0, 2\pi])$ de Hilbertruimte van 2π-periodische functies die kwadratisch integreerbaar zijn over één periode. Zij K de deelruimte van $L^2([0, 2\pi])$ zodat voor alle $f \in K$ geldt dat $f(x + \pi) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- Welke Fouriercoëfficiënten kunnen deze functies hebben? M.a.w. bepaal de deelruimte
$$\{(\widehat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid f \in K\} \subset \ell^2(\mathbb{Z})$$
volledig.

- Bereken $K^\perp$. Bewijs je antwoord nauwkeurig.

- Vind een orthonormale basis voor K en bewijs je antwoord nauwkeurig.