

Examen Analyse 2024

Neem $\epsilon > 0$ willekeurig

26 juni 2024

Vragen

Vraag 1

- a) Zij $a < b \in \mathbb{R}$. Zij $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ een continue functie. Toon aan dat er een $x \in [a, b]$ bestaat zodat $f(x) = x$.

Geldt deze uitspraak nog steeds voor de volgende gevallen? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

- b) Als $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ niet continu?
c) Als $f :]0, 1[\rightarrow]0, 1[$ continu?
d) Als $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ continu?

Vraag 2

- a) Zij $R \in \mathbb{R}_0^+$. Zij $f :]-R, R[\rightarrow \mathbb{R}$ een functie die minstens $k \geq 1$ keer afleidbaar is. Stel dat er getallen $-R < a_1 < \dots < a_{k+1} < R$ zijn zodat $f(a_i) = 0$ voor alle $i \in \{1, \dots, k+1\}$. Toon aan dat er een $b \in]a_1, a_{k+1}[$ bestaat zodat $f^{(k)}(b) = 0$.
b) Zij f een machtreeks gedefinieerd door $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ met als convergentiestraal $R \in \mathbb{R}_0^+$ en stel dat er een rij $(a_n)_n$ in $] -R, R[\setminus \{0\}$ is die convergeert naar 0 en waarvoor geldt dat $f(a_n) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Toon aan dat $f = 0$.

Vraag 3

Zij $C([0, 1])$ de verzameling continue functies van $[0, 1]$ naar $\mathbb{R}$ uitgerust met de supremummetriek d_∞ . Zij $\rho_x : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R} : f \mapsto \rho_x(f) = f(x)$ voor $x \in [0, 1]$. Zij $A \subseteq C([0, 1])$. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor de volgende uitspraken.

- a) Stel dat A compact is. Dan is $\rho_x(A)$ compact voor alle $x \in [0, 1]$.
b) Stel dat A open is. Dan is $\rho_x(A)$ open voor alle $x \in [0, 1]$.

Oplossingen

Zoals gewoonlijk zijn dit de oplossingen van een student.

Vraag 1

- a) Neem aan dat $f(a) \neq a$ en $f(b) \neq b$, want in deze gevallen is de uitspraak triviaal. Dus moet $f(a) > a$ en $f(b) < b$. Zij nu $g(x) = f(x) - x$. Dan is g continu, want f en $I_{\mathbb{R}}$ zijn beide continu. Nu is $g(a) = f(a) - a > 0$ en is $g(b) = f(b) - b < 0$. Omdat g gedefinieerd is op een interval, volgt uit de tussenwaardestelling dat er een $x \in]a, b[$ zodat $g(x) = 0$ en dus $f(x) = x$.
- b) Deze uitspraak is niet waar. Zij $a = 0$, $b = 1$ en

$$f : [a, b] \rightarrow [a, b] : x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{als } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\\ 0 & \text{als } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Dan is het meteen duidelijk dat f een tegenvoorbeeld is, want de enige twee waarden die f kan aannemen zijn $\frac{1}{2}$ en 0 , maar $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ en $f(0) = \frac{1}{2}$.

- c) Neem $f :]0, 1[\rightarrow]0, 1[: x \mapsto f(x) = x^2$. Dan volgt dat als $f(x) = x$, dan $x^2 - x = 0$ en dus $x \cdot (x - 1) = 0$. Dus is $x = 0$ of $x = 1$. Dit kan niet, want zowel 0 als 1 behoort niet tot $]0, 1[$.
- d) Neem $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto f(x) = x + 1$. Dan volgt dat als $f(x) = x$, dat $x = x + 1$ en dus $0 = 1$. Per definitie van $\mathbb{R}$ is dit niet zo en dus bestaat een zulke x niet.

Vraag 2

- a) We bewijzen dit via inductie op k .

- Basisgeval: $k = 1$

Als $k = 1$ hebben we $-R < a_1 < a_2 < R$ zodat $f(a_1) = f(a_2) = 0$. Gezien f afleidbaar is op $] -R, R[$ is f ook afleidbaar en continu op $[a_1, a_2]$. Nu volgt uit de middelwaardestelling van Rolle dat er een $b \in]a_1, a_2[$ bestaat zodat $f'(b) = 0$.

- Inductiestap: Stel dat er voor $k - 1$, met $k \geq 2$ willekeurig, en elke zulke f en a_i een $b \in]a_1, a_k[$ bestaat zodat $f^{(k-1)}(b) = 0$.

Neem nu een strikt stijgende rij $(a_n)_{n \in \{1, \dots, k+1\}}$ zodat $f(a_i) = 0$ voor alle $i \leq k + 1$. Omdat f afleidbaar is op het interval $[a_i, a_{i+1}]$, volgt uit de middelwaardestelling van Rolle dat er telkens een $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ bestaat zodat $f'(b_i) = 0$ voor elke $i \leq k$. Nu is $a_1 < b_1 < \dots < b_k < a_{k+1}$ en is f' nog $k - 1$ keer afleidbaar. Dus nu volgt uit de inductiehypothese dat er een $b \in]a_1, a_k[$ bestaat zodat $(f')^{(k-1)}(b) = f^{(k)}(b) = 0$.

- b) Omdat f gedefinieerd is als een machtsreeks, is f onbeperkt afleidbaar en dus is elke afgeleide van f ook continu. We tonen aan dat $f^{(n)}(0) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Neem een rij $(b_k)_k \in]a_k, a_{k+n+1}[$ zodat $f^{(n)}(b_k) = 0$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Uit deel a) volgt dat kan. Omdat a_k convergeert naar 0, volgt uit de insluitstelling dat b_k ook convergeert naar 0. Omdat de n -de afgeleide van f steeds continu is, is $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{(n)}(b_k) = f^{(n)}(\lim_{k \rightarrow \infty} b_k) = f^{(n)}(0)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Aangezien $f^{(n)}(0) = k!c_n$ moet nu $c_n = 0$ voor alle n en dus volgt dat $f = 0$.

Vraag 3

- a) Neem aan dat A compact is. We tonen aan dat $\rho_x(A)$ rijcompact is voor alle $x \in [0, 1]$. Neem $x \in [0, 1]$ willekeurig. Zij $(a_n)_n$ een willekeurige rij in $\rho_x(A)$. Er is dan een rij van functies $(f_n)_n$ in A zodat $f_n(x) = a_n$ voor alle n . Omdat A compact en dus rijcompact is, heeft $(f_n)_n$ een convergente deelrij $(f_{n_k})_k$ met limiet $f \in A$. Dan is er voor elke $\epsilon > 0$ een $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat voor alle $n \geq n_0$ en $x \in [0, 1]$ geldt dat $|f_{n_k}(x) - f(x)| < \epsilon$. Dus is $(a_{n_k})_k$ een convergente deelrij van $(a_n)_n$ met limiet $f(x) \in \rho_x(A)$. Omdat x, ϵ en $(a_n)_n$ willekeurig gekozen waren, volgt dat $\rho_x(A)$ rijcompact en dus compact is voor elke $x \in [0, 1]$.
- b) Neem aan dat A open is. Neem $a \in \rho_x(A)$ willekeurig. Er is dan een $f \in A$ zodat $f(x) = a$. Omdat A open is, is er een $\epsilon > 0$ zodat $B(f, \epsilon) \subseteq A$. We tonen aan dat $]a - \epsilon, a + \epsilon[\subseteq \rho_x(A)$. Neem $b \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$ willekeurig. Zij $g = f - a + b$. Dan is $d_\infty(f, g) = |b - a| < \epsilon$ en dus is $g \in A$. Nu is $g(x) = f(x) - a + b = b$. Dus is $b \in \rho_x(A)$. Dus zal ook $B(a, \epsilon) \subseteq \rho_x(A)$, want b was willekeurig gekozen. Aangezien a willekeurig genomen was, is $\rho_x(A)$ open.