

Examen Analyse 2025

∈ Wina

25 Juni 2025, 8:00-11:00

Vragen

Alle vragen tellen voor evenveel punten mee in het totaal. Hiervoor hadden we 3 uur de tijd.

Vraag 1

- a) Bepaal de convergentiestaal van de machtsreeks $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{5^{n-1}} z^n$ en evalueer deze reeks in $z \in \{1, 2, 3\}$ indien ze convergeert voor deze waarden van z .
- b) Zij $p > 1$ een reëel getal. Bewijs dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ convergeert. Beargumenteer nauwkeurig.

Hint:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} \right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} \right) + \dots$$

Vraag 2

Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een continue en periodieke functie. Met periodiek bedoelen we dat er een $p > 0$ bestaat zodat $f(x+p) = f(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

- a) Bewijs dat f uniform continu is.
- b) Bewijs dat $f(\mathbb{R}) = [a, b]$ voor $a \leq b \in \mathbb{R}$.
- c) Bewijs dat de vergelijking $f(x) = 1 + 2x^2 - \frac{\pi}{2}x^3 + 5x^5$ minstens één oplossing heeft in $\mathbb{R}$.

Vraag 3

Zij $(K_n)_{n \geq 1}$ een dalende rij van niet-lege, gesloten deelverzamelingen van een metrische ruimte (X, d) . Stel $K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$.

- a) Stel dat X compact is. Leg uit waarom $K \neq \emptyset$.

- b) Stel nog steeds dat X compact is. Zij $V \subseteq X$ een open verzameling zodat $K \subseteq V$. Toon aan dat er een $n \in \mathbb{N}_0$ zodat $K_n \subseteq V$.
- c) Geldt b) nog steeds als we niet veronderstellen dat X compact is? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Oplossingen

Deze oplossingen zijn van een student en dus zonder garantie op foutloosheid.

Vraag 1

- a) We herschrijven de gegeven machtsreeks als $5 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}z \right)^n - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}z \right)^n - 1 \right)$. De -1 komt hier door het aanpassen van de index n . Hierin herkennen we twee meetkundige reeksen met redenen $q_1 = \frac{1}{5}z$ en $q_2 = \frac{2}{5}z$. We weten dat deze convergeren als en slechts als $|q_1| < 1$ en $|q_2| < 1$, of dus resp. $|z| < 5$ en $|z| < \frac{5}{2}$. Omdat de convergentiestraal van de som gelijk is aan het minimum van de convergentiestralen, volgt dus dat $R = \frac{5}{2}$.

Daar $|1|, |2| < R$, convergeert de reeks voor $z = 1, 2$ en daar $|3| > R$ divergeert de reeks voor $z = 3$. We kennen de limiet van een meetkundige reeks, dus volgt dat

$$\begin{aligned} 5 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}z \right)^n - 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}z \right)^n - 1 \right) &= 5 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{5}z} + \frac{1}{1 - \frac{2}{5}z} \right) - 10 = \\ &= 25 \left(\frac{1}{5 - z} + \frac{1}{5 - 2z} \right) - 10 = 25 \frac{10 - 3z}{(5 - z)(5 - 2z)} - 10. \end{aligned}$$

Als we hier $z = 1, 2$ invullen, krijgen we het volgende:

$$25 \frac{10 - 3 \cdot 1}{(5 - 1)(5 - 2 \cdot 1)} - 10 = \frac{55}{12},$$

$$25 \frac{10 - 3 \cdot 2}{(5 - 2)(5 - 2 \cdot 2)} - 10 = \frac{70}{3},$$

- b) We herschikken de reeks volgens machten van 2, zoals in de hint aangegeven staat. Daar alle termen van de reeks positief zijn, kan dit geen problemen geven.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(2^n + k)^p}$$

Nu is $2^n \leq 2^n + k$ en daar $p > 1$, is dan ook $(2^n)^p \leq (2^n + k)^p$ en dus $\frac{1}{(2^n + k)^p} \leq \frac{1}{(2^n)^p}$. Dus nu volgt dat

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(2^n + k)^p} &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(2^n)^p} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{np}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{p-1}} \right)^n. \end{aligned}$$

Hier herkennen we een meetkundige reeks met reden $\frac{1}{2^{p-1}}$. Omdat $p-1 > 0$, is $2^{p-1} > 1$ en dus is $\frac{1}{2^{p-1}} < 1$. Bijgevolg is deze meetkundige reeks convergent. Nu volgt uit de vergelijkingstest dat $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ ook convergent is.

Vraag 2

- a) Omdat f continu is en $[-p, 2p]$ een gesloten en begrens interval is, volgt dat f ook uniform continu is op dit interval.

Neem nu $\epsilon > 0$ willekeurig. Nu bestaat er een $\delta_1 > 0$ zodat voor alle $x, y \in [-p, 2p]$ met $|x - y| < \delta_1$ geldt dat $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Neem nu $\delta < \min\{p, \delta_1\}$. Neem $x, y \in \mathbb{R}$ zodat $|x - y| < \delta$ willekeurig. Omdat elk reëel getal begrepen ligt tussen twee gehele veelvouden van een willekeurig strikt positief reëel getal, bestaat een $k \in \mathbb{Z}$ en $0 \leq r < p$ zodat $x = kp + r$. Dus dan is $y = kp + r'$ met $-p \leq r' \leq 2p$, daar $|x - y| < p$. Nu volgt uit de periodiciteit van f dat $f(x) = f(r)$ en $f(y) = f(r')$. Omdat $r, r' \in [-p, 2p]$ en $|r - r'| = |x - y| < \delta_1$, volgt dat $|f(x) - f(y)| = |f(r) - f(r')| < \epsilon$.

Omdat x, y, ϵ willekeurig gekozen waren, volgt dat f uniform continu is op heel $\mathbb{R}$.

- b) Omdat f continu is en $[0, p]$ een gesloten en begrens interval is, volgt uit de extremewaardstelling van Weierstrass dat f zijn maximum b op $x_1 \in [0, p]$ en zijn minimum a op $x_2 \in [0, p]$ bereikt.

Nu volgt voor elke $x \in \mathbb{R}$ opnieuw dat $x = kp + r$ voor $k \in \mathbb{Z}$ en $0 \leq r < p$. Dus nu is $a \leq f(r) = f(x) \leq b$ en dus is $f(\mathbb{R}) \subseteq [a, b]$.

Omdat f een continue functie gedefinieerd op heel $\mathbb{R}$ en dus ook op het interval $[x_1, x_2]$, volgt uit de tussenwaardstelling dat voor elke $y \in [a, b]$ er een $x \in [x_1, x_2]$ bestaat zodat $f(x) = y$. Dus volgt dat $[a, b] \subseteq f([x_1, x_2]) \subseteq f(\mathbb{R})$.

Daar beide inclusies gelden, volgt dat $f(\mathbb{R}) = [a, b]$.

- c) Zij $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 1 + 2x^2 - \frac{\pi}{2}x^3 + 5x^5$. Dan is g een lineaire combinatie van continue machtsfuncties en dus zelf ook continu. Nu is

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + 2x^2 - \frac{\pi}{2}x^3 + 5x^5 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x^5} + \frac{2}{x^3} - \frac{\pi}{2x^2} + 5 \right), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + 2x^2 - \frac{\pi}{2}x^3 + 5x^5 \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \cdot \left(\frac{1}{x^5} + \frac{2}{x^3} - \frac{\pi}{2x^2} + 5 \right). \end{aligned}$$

Omdat het tweede deel telkens begrens is op elk interval $[M, +\infty[$ of $] -\infty, -M]$ voor $M > 0$, kunnen we besluiten dat $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$ en

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$. Dus nu bestaan er een $m, M \in \mathbb{R}$ zodat $g(x) < a$ voor alle $x < m$ en $g(x) > b$ voor alle $x > M$.

Zij nu $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) - g(x)$ ook continue, want g en f zijn beide continu. Bovendien is h gedefinieerd op het interval $[m-1, M+1]$. Ook is $h(m-1) = f(m-1) - g(m-1) > a - a = 0$ en $h(M+1) = f(M+1) - g(M+1) < b - b = 0$. Dus ligt 0 strikt tussen $h(m-1)$ en $h(M+1)$. Nu volgt uit de tussenwaardestelling dat er een $x \in [m-1, M+1]$ moet bestaan zodat $h(x) = 0$ en dus $f(x) = 1 + 2x^2 - \frac{\pi}{2}x^3 + 5x^5$.

Vraag 3

a) Omdat K_n niet leeg is voor elke $n \geq 1$, kunnen we een rij $(x_n)_{n \geq 1}$ nemen zodat $x_n \in K_n$ voor elke $n \geq 1$. Omdat X compact is en dus ook rijcompact, heeft x_n een convergente deelrij x_{n_k} met $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Omdat K_n een dalende rij van verzamelingen is, is dan $(x_{n_k})_{k \geq n}$ een convergente rij in K_n met dezelfde limiet, daar $x_{n_k} \in K_{n_k} \subseteq K_k \subseteq K_n$. Omdat K_n telkens gesloten is, is dan $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in K_n$. Omdat $x \in K_n$ voor alle $n \geq 1$, volgt dat $x \in \bigcap_{n \geq 1} K_n = K$. Dus is $K \neq \emptyset$.

b) Stel dat er geen zulke $n \in \mathbb{N}_0$ bestaat. Dan volgt dat voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ $K_n \setminus V$ niet leeg is en we dus een rij $(x_n)_{n \geq 1}$ in X kunnen nemen zodat $x_n \in K_n \setminus V$ voor elke $n \in \mathbb{N}_0$. Omdat X compact en dus ook rijcompact is, volgt dat deze rij een convergente deelrij $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ heeft met $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k}$. Zoals hierboven bewezen, volgt, daar elke $x_n \in K_n$, dat $x \in K$. Omdat V open is, is V^c gesloten. Omdat elke $x_{n_k} \in V^c$, volgt dat $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in V^c$.

Nu is $x \in K$ zonder dat $x \in V$. Omdat $K \subseteq V$, is dit onmogelijk. Tegenspraak, dus een zulke $n \in \mathbb{N}_0$ moet wel bestaan.

c) Neen, de veronderstelling dat X compact is, is wel degelijk nodig. Als X niet compact hoeft te zijn, hoeft X ook niet volledig te zijn en dus kunnen we $X = \mathbb{Q}$ met de standaardmetriek nemen. Neem nu $K_n = [\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}] \cap \mathbb{Q}$. Dan is K_n telkens evident gesloten en niet-leeg.

We bewijzen nu dat $K = \emptyset$. Neem $x \in \mathbb{Q}$ willekeurig. Daar $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, is dan $x \neq \sqrt{2}$ en dus is $|x - \sqrt{2}| > 0$. Dus bestaat er een $n \in \mathbb{N}_0$ zodat $\frac{1}{n} < |x - \sqrt{2}|$. Dus dan volgt dat $x \notin [\sqrt{2} - \frac{1}{n}, \sqrt{2} + \frac{1}{n}] \cap \mathbb{Q} = K_n$ en dus ook $x \notin \bigcap_{n \geq 1} K_n = K$. Omdat x willekeurig gekozen was, bestaat er geen enkele $x \in K$ en dus is $K = \emptyset$.

Daar $K = \emptyset$, geldt voor elke open verzameling $V \subseteq \mathbb{Q}$ dat $K \subseteq V$, ook voor V die geen omgeving van $\sqrt{2}$ bevatten. In het bijzonder kunnen we dus de open verzameling $V =]-2, -1[$ nemen. Daar $\sqrt{2} - 1 \geq \sqrt{1} - 1 = 0 > -1$, volgt dat $V \cap [\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1] = V \cap K_1 = \emptyset$. Omdat K_n een dalende rij van niet-lege verzamelingen is, kan het dus niet dat $K_n \subseteq V$ voor een $n \geq 1$. Dus voldoet K_n niet aan deze eigenschap.