# Examen Anaytische Mechanica

26 januari 2012, eerste sessie

## Vraag 1: Canonische Transformatie

Beschouw de Lagrangiaan

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} e^{-at} \left( \dot{q}^2 - kq^2 \right) .$$

Wat is de bewegingsvergelijking? Herken je die? Wat is de fysische betekenis van $a$?

Bereken de Hamiltoniaan. Geeft de waarde van de Hamiltoniaan een behouden energie?

Het lijkt dat de Hamiltoniaan kan vereenvoudigd worden door een canonische transformatie met

$$\tilde{q} = e^{-at/2} q, \qquad \text{en} \qquad \tilde{p} = ??? \quad \text{(vul zelf aan)}$$

Welk type van canonische transformatie is dit nu? Welke variabelen kunnen we gebruiken voor een genererende functie? Geef zulk een genererende functie.

Wat is de nieuwe Hamiltoniaan in de nieuwe variabelen?

Als je wil zeker zijn, kan je natuurlijk de bewegingsvergelijking van het nieuwe Hamiltoniaanse systeem opstellen, en vergelijken met wat je eerst gevonden hebt.

## Vraag 2: Poisson structuur

Poissonhaken zijn gedefinieerd in de faseruimte door een matrix $I^{ij}$ en

$$[f(x), g(x)] = \ldots \quad \text{(vul dit in)}.$$

In de cursus is die matrix $I^{ij}$ gedefnieerd als inverse van $J_{ij}$. Maar nu beschouwen we $I^{ij}$ als een willekeurige matrix. Bovendien laten we toe dat $I^{ij}(x)$ een functie is van de faseruimte, terwijl we in de cursus meestal $I^{ij}$ constant hebben gehouden.

We eisen nu dat voldaan is aan de vijf eigenschappen die we zagen in de cursus:

*The Poisson brackets satisfy the following properties for three functions $f$, $g$ and $h$:*

1. $[f, g] = -[g, f]$, *antisymmetry*.
2. $[kf, g] = k[f, g]$, *when $k$ is a constant*.
3. $[f, g + h] = [f, g] + [f, h]$.
4. $[f, gh] = [f, g]h + g[f, h]$.
5. $[[f, g], h] + [[g, h], f] + [[h, f], g] = 0$, *Jacobi identity*.

Sommige eisen zijn al automatisch voldaan door de vorm van de definitie van Poissonhaken, en andere leggen eisen op aan $I^{ij}(x)$. Waaraan moet $I$ voldoen door deze eisen?