

Examen analyse
Tweede kandidatuur wiskunde en natuurkunde
Augustus 2004

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Dit wil zeggen van **8.30 tot 12.30**. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Het examen is **schriftelijk en open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
 - je cursus,
 - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
 - eventueel de cursus *Wiskundige Analyse* van de eerste kandidatuur.

Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van

- een zakrekenmachine of draagbare computer,
 - boeken of fotocopieën uit boeken.
- Aarzel niet om me iets te vragen als er iets onduidelijk is.

Schrijf op elk blad je naam én je studierichting!

Geef straks ook je opgave en kladbladen af!

Hou je studentenkaart klaar!

Veel succes!

1. Zij $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ een C^1 -functie die voldoet aan

$$f(0) = 2 \quad \text{en} \quad \int_0^2 x f(x) dx = 8.$$

Definieer het vectorveld $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, 0, f(z))$. Definieer een octant van de ellipsoïde als

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 36, x, y, z \geq 0\}.$$

- a) Toon aan dat

$$\int_{\partial K} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} dA = 9\pi,$$

waarbij $\mathbf{n}$ de naar buiten wijzende éénheidsnormaal op ∂K is.

- b) Verifieer de divergentiestelling voor het vectorveld $\mathbf{V}$ en het volume K .

2. a) Zij $\alpha \in \mathbb{R}$. Bewijs dat de functie

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow [0, +\infty] : \theta \mapsto \begin{cases} |\cos \theta|^\alpha & \text{als } \cos \theta \neq 0, \\ +\infty & \text{als } \cos \theta = 0, \end{cases}$$

Lebesgue-integreerbaar is als en slechts als $\alpha > -1$.

- b) Zij $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Beschouw de schijf $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ en de functie

$$g : K \rightarrow [0, +\infty] : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{|x|^\alpha}{(x^2 + y^2)^\beta} & \text{als } x \neq 0, \\ +\infty & \text{als } x = 0. \end{cases}$$

Bepaal de waarden van $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ waarvoor deze functie Lebesgue-integreerbaar is. Bewijs je antwoord zo nauwkeurig mogelijk.

3. a) Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ een continue functie en veronderstel dat

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} x f(x) = 0. \quad (\star)$$

Bestudeer van nabij de volgende redenering. Voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ geldt dat

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} n f(nx) dx.$$

Omdat f voldoet aan vergelijking $(\star)$, weten we dat

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n f(nx) = 0$$

voor alle $x \neq 0$. We kunnen dan concluderen dat

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 0.$$

Is deze redenering correct? Met andere woorden: is de integraal van elke continue functie die voldoet aan $(\star)$ gelijk aan 0? Zo niet, waar zit de fout in de redenering? Argumenteer zo precies mogelijk vanuit de theorie van Lebesgue-integratie.

- b) Zij $x > 0$. We berekenen de integraal $\int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt$ op twee manieren.

De eerste manier levert

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt = \int_{]0,+\infty[} dt \int_{[1,x]} dy e^{-ty} = \int_{[1,x]} dy \frac{1}{y} = \ln x .$$

De tweede manier levert

$$\begin{aligned} \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} dt &= \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-tx}}{t} dt \\ &= \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_{]0,+\infty[} \frac{e^{-u}}{u} du = 0 , \end{aligned}$$

waarbij we de substitutie $u = tx$ gebruikt hebben.

Welk van de twee manieren is de juiste? Geef een gedetailleerd bewijs voor de correcte berekening en geef de fout aan in de foute berekening.

4. a) Bewijs dat $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\pi}{6e^2}(2e-1) .$

- b) Bepaal zonder te veel rekenwerk de Taylorreeksontwikkeling van de functie

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = e^z \sin z$$

rond het punt $z = 0$. Schrijf elke coëfficiënt in de vorm $a + ib$ met $a, b \in \mathbb{R}$.

5, alleen voor natuurkunde.

Bereken de integraal van de functie $f(x, y, z) = 4z$ over de bolkap

$$\mathcal{O} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 , \quad z \geq \frac{1}{2} \right\} .$$

Antwoord: 3π .

5, alleen voor wiskunde.

Bereken voor $\alpha > 1$ de integraal $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^\alpha}$.

Eerste hint: Gebruik een contour dat bestaat uit het lijnstuk van 0 naar R , de cirkelboog van R naar $R \exp(\frac{2\pi i}{\alpha})$ en het lijnstuk van $R \exp(\frac{2\pi i}{\alpha})$ naar 0.

Tweede hint: Je kan ook al punten verdienen door het speciale geval $\alpha \in \mathbb{N}$ te bekijken.