Examen analyse
Tweede kandidatuur wiskunde en natuurkunde
Augustus 2005

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen, van **9 uur** tot **13 uur**. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Het examen is **schriftelijk en open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel de cursus *Wiskundige Analyse* van de eerste kandidatuur.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotokopies uit boeken.
- Aarzel niet om me iets te vragen als er iets onduidelijk is.

Schrijf op elk blad je naam én je studierichting!
Hou je studentenkaart klaar!

Veel succes!

1. a) Bepaal de waarden van $a \in \mathbb{R}$ waarvoor de functie

$$f :]0, \pi] \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{(1 - \cos x)^a}$$

integreerbaar is. Argumenteer nauwkeurig!

b) Bepaal de waarden van $a \in \mathbb{R}$ waarvoor de functie

$$f :]0, 1] \times]0, 1] \to \mathbb{R} : f(x, y) = \frac{1}{(x + y)^a}$$

integreerbaar is. Argumenteer nauwkeurig!

2. Op elk van de volgende vragen kan je in enkele lijntjes antwoorden.

a) In Definitie 1.1 (pagina 11) eisen we dat $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ voor elke rij $(A_n)_n$ in $\mathcal{M}$. Waarom is het geen goed idee om in deze definitie te eisen dat $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{M}$ voor elke familie $(A_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{M}$ (eventueel geïndexeerd door een overaftelbare verzameling I)?

b) Om de residustelling efficiënt te kunnen toepassen, moeten we op een makkelijke manier residu's kunnen berekenen van concrete analytische functies. Leg uit waarom dit makkelijk kan in polen, maar veel moeilijker is in essentiële singulariteiten.

c) Leg in enkele lijnen en zonder technische details uit dat onder exact dezelfde voorwaarden als in Stelling 3.26 (pagina 100), geldt dat

$$I(\gamma, z_0) f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} \, dz$$

voor alle $k \in \mathbb{N}$.

3. Zij $\alpha, \beta : [0, 1] \to \mathbb{R}_0^+$ C^1-functies die voldoen aan $\alpha(0) = \beta(0) = \alpha(1) = 1$ en $\beta(1) = 2$. Beschouw het oppervlak

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, 1] \text{ en } \frac{y^2}{\alpha(x)^2} + \frac{z^2}{\beta(x)^2} = 1\} .$$

Oriënteer K met de naar buiten wijzende normaal en oriënteer ∂K op compatibele wijze. Definieer het vectorveld $\mathbf{V}(x, y, z) = (0, 0, y)$.

a) Toon aan dat $\int_{\partial K} \mathbf{V} \cdot \mathbf{r} \, dL = -\pi$.

b) Verifieer de Stelling van Stokes voor K.

4. Deze vraag bestaat uit een lijst 'kleine' oefeningen. Als je een onderdeel niet kan oplossen, mag je toch verdergaan en de voorgaande resultaten gewoon gebruiken.

   a) Zij $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Definieer als volgt de nieuwe functie $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

   $$(f * g)(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\, dy & \text{als deze uitdrukking zin heeft,} \\ 0 & \text{elders.} \end{cases}$$

   Toon aan dat $f * g$ integreerbaar is en $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1$.

   b) Zij $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Definieer

   $$\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx}\, dx \ .$$

   Toon aan dat $\widehat{f}$ een continue functie is.

   c) Toon aan dat $\widehat{f * g} = \widehat{f}\, \widehat{g}$ voor alle $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

5, alleen voor wiskunde.

a) Zij P een veelterm met coëfficiënten in $\mathbb{C}$. Zij z_0 een nulpunt van P. Dan is z_0 een geïsoleerde singulariteit van $\frac{P'}{P}$, waarbij P' de afgeleide van P is. Toon aan dat het residu $\operatorname{Res}\left(\frac{P'}{P}, z_0\right)$ gelijk is aan de multipliciteit van het nulpunt z_0.
Zij γ een cirkel in $\mathbb{C}$. Bewijs dat

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$$

gelijk is aan het aantal nulpunten van P gelegen binnen γ (en geteld met multipliciteit).

b) Zij $0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty$ en $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$. Zij $f : A \to \mathbb{C}$ een analytische functie. Definieer

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r_2\} \quad , \qquad A_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > r_1\} \ .$$

Merk op dat $A = A_1 \cap A_2$. Toon aan dat er unieke analytische functies

$$f_1 : A_1 \to \mathbb{C} \quad \text{en} \quad f_2 : A_2 \to \mathbb{C}$$

bestaan zodat $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ voor alle $z \in A$ en $f_1(0) = 0$.

5, alleen voor natuurkunde.

a) Zij $\mathbf{u}$ het snelheidsvectorveld van een stromende vloeistof. Veronderstel dat deze vloeistof onsamendrukbaar is. Leg uit waarom $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

b) Bewijs dat voor alle $a > 0$ en $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^n x^a}\, dx = \frac{\pi a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-2)}{(n-1)!\ \sin(\pi a)} \ .$$