

Examen Bewijzen & Redeneren: augustus 2010

23 augustus 2010

Tijd: 4 u. Meer dan voldoende.

1. Beantwoord volgende vraagjes. Leg telkens je antwoord uit. Concrete bewijzen worden niet gevraagd.

(a) Geef de elementen van $P(X)$ en $P(P(X))$ als $X = \emptyset$.
(2 ptn)

(b) Gegeven is een eindige verzameling X met $|X| = n$
i. Bepaal het aantal elementen in $X \times P(X)$.
ii. Bepaal het aantal functies $f : X \rightarrow P(X)$ waarvoor geldt dat $x \notin f(x)$.
(4 ptn)

(c) Bepaal of de verzamelingen aftelbaar of overaftelbaar zijn.
i. $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
ii. De verzameling van alle convergente rijen in $\mathbb{Z}$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
(4 ptn)

2. Gegeven is een functie $f : X \Rightarrow Y$.

(a) Toon aan dat voor alle $B_1, B_2 \in P(Y)$ geldt dat

$$B_1 \subset B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2). \quad (1)$$

(3 ptn)

(b) Toon met een leuk voorbeeld aan dat volgende implicatie niet altijd hoeft te gelden:

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2) \Rightarrow B_1 \subset B_2. \quad (2)$$

(2 ptn)

(c) Bewijs dat implicatie (2) geldt als en slechts als f surjectief is.
(5 ptn)

3. Gegeven is de functie $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. We leggen een relatie R op X . (x, y) behoort tot R als en slechts als

$$f(x) \leq f(y).$$

(a) Bewijs dat R transitief en reflexief is.
(2 ptn)

- (b) Toon met plezierige voorbeeldjes aan dat R niet symmetrisch, maar ook niet anti-symmetrisch is.
(2 ptn)
- (c) Bewijs dat R een orderrelatie is als en slechts als f injectief is.
(4 ptn)
- (d) Zouden we van R een equivalentierelatie kunnen maken door een bepaalde voorwaarde op f te leggen? Zo ja, bepaal een voorwaarde en toon aan dat R dan een equivalentierelatie is. Zo nee, bewijs dat er geen voorwaarde bestaat zo dat R een equivalentierelatie wordt.
(2 ptn)

4. Gegeven is de rij (a_n) , gegeven door

$$a_n = \frac{n^2 - 5}{3n^2 + 4n + 5} \text{ met } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Geef de definitie van convergentie van een rij van reële getallen.
(2 ptn)
 - (b) Bewijs doormiddel van de definitie van convergentie van rijen dat (a_n) convergeert.
(8 ptn)
5. (a) Geef de definitie van $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ voor een begrensde rij (a_n) in $\mathbb{R}$ (2 ptn)
- (b) Bewijs dat voor twee begrensde reële rijen (a_n) en (b_n) geldt dat

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat gelijkheid niet altijd geldt.

(4 ptn)

- (c) Bewijs dat wanneer (b_n) een cauchyrij is, voor elke begrensde rij (a_n) geldt dat

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

(4 ptn)

