

Examen Differentiaalvergelijkingen 30 januari 2017

Vraag 1 (mondeling)

Beschouw het volgende stelsel van differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} x' = -x + \exp(ay) - 1 \\ y' = \sin(x - y) \end{cases}$$

met $a \in \mathbb{R}$.

1. Classificeer voor elke a het kritieke punt $(0, 0)$.
2. Er waren vier faseportretten gegeven en je moest aanduiden welk portret bij $a = -2$ en $a = 1$ hoorde.
3. Los het gelineariseerd stelsel expliciet op voor $a = 1$.

Vraag 2 (mondeling)

Gegeven de volgende differentiaalvergelijking

$$x^2 y'' + ax y' + by = 0$$

de algemene oplossing van de vergelijking is $y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$ met r_1, r_2 oplossingen van de vergelijking $r(r - 1) + ar + b = 0$. Er is maar een oplossing als $r_1 = r_2$.

1. Voor welke waarden van a en b krijg je zo'n geval?
2. Bepaal een tweede lineair onafhankelijke oplossing met behulp van orderreductie.
3. Gebruik de substitutie $x = e^t$ om een oplossing van de vergelijking te bepalen voor $\hat{y}(t) = y(e^t)$.

Vraag 3

Gegeven het stelsel partiële differentiaalvergelijkingen

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Stel $\vec{E} = (0, E_y, 0)$ en $\vec{B} = (0, 0, B_z)$ en dat er enkel een ruimtelijke variatie in de x -richting mogelijk is.

1. Aan welke tweede orde PDE voldoet $\vec{B}$?
2. Classificeer deze differentiaalvergelijking.
3. Beantwoord enkel de vraag die overeenkomt met je antwoord op de vorige vraag!
 - Als de vergelijking elliptisch is, vind dan een algemene oplossing met nul randvoorwaarde op het domein $[0, L] \times [0, T]$.
 - Vergeten (niet belangrijk, want de vergelijking was hyperbolisch).
 - Als de vergelijking hyperbolisch is, vind dan de snelheid waarmee een golf van de vorm $B_z(x - at)$ voortbeweegt.

Vraag 4

We bekijken de diffusievergelijking op een ring met $\xi \in [0, 1]$. Ja het interval was $[0, 1]$, niet $[0, 2\pi]$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - c \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0$$

Natuurlijk moet de oplossing periodisch zijn in ξ , dus we hebben de volgende randvoorwaarden:

- $u(0, t) = u(1, t)$
 - $\partial_\xi u(0, t) = \partial_\xi u(1, t)$
1. Bepaal de algemene oplossing van de vergelijking met beginvoorwaarde $u(\xi, 0) = f(\xi)$.
 2. Voor de specifieke functies $f_1(\xi) = \sin(2\pi\xi)$, $f_2(\xi) = \sin(4\pi\xi)$, welke van de twee oplossingen u_1, u_2 zal bij $t = 10$ het meest gedaald zijn?