Examen analyse
Tweede kandidatuur wiskunde en natuurkunde
Januari 2005

Enige toelichting

- Je krijgt **4 uur** voor dit examen. Dit wil zeggen van **9.00 tot 13.00**. Je mag tussendoor eten of drinken.
- Het examen is **schriftelijk en open boek**. Dit wil zeggen dat je mag gebruik maken van
  - je cursus,
  - je eigen notities afkomstig uit de les, de oefenzitting of je studie thuis,
  - eventueel de cursus *Wiskundige Analyse* van de eerste kandidatuur.

  Dit wil zeggen dat je **geen gebruik** mag maken van
  - een zakrekenmachine of draagbare computer,
  - boeken of fotocopies uit boeken.
- Aarzel niet om me iets te vragen als er iets onduidelijk is.

Schrijf op elk blad je naam én je studierichting!

Hou je studentenkaart klaar!

Veel succes!

1. a) Bepaal de waarden van $a \in \mathbb{R}$ waarvoor de functie

$$f :]0,1[\to \mathbb{R} : f(x) = \frac{x-1}{x^a \ln x}$$

integreerbaar is. Argumenteer nauwkeurig!

b) Bepaal de waarden van $a \in \mathbb{R}$ waarvoor de functie

$$f :]0,1] \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{1}{|x - \sin x|^a}$$

integreerbaar is. Argumenteer opnieuw nauwkeurig.

2. Op elk van de volgende vragen kan je in enkele lijntjes antwoorden.

a) Bewijs dat de verzamelingen $\{\ ]a,b[\ \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ de Borel-σ-algebra op $\mathbb{R}$ voortbrengen.

b) Stelling 3.59 levert formules om integralen van de vorm

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iwx}\, dx$$

uit te rekenen. Waarom bekomen we verschillende formules naargelang $w > 0$ en $w < 0$?

c) Omdat $|\sin z| \leq 1$ voor alle z, volgt uit de stelling van Liouville dat sin een constante functie is. Wat is er verkeerd in deze redenering?

d) Waarom hebben we in de algemene stelling van Cauchy (Stelling 3.41), de voorwaarde $I(\Sigma, z) = 0$ voor alle $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{U}$ nodig? En waarom hebben we deze voorwaarde niet nodig in de stelling van Cauchy-Goursat (Stelling 3.21)?

3. Beschouw de kwartkegel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq (1-z)^2\ ,\ \ 0 \leq x, y\ ,\ \ 0 \leq z \leq 1\}$$

en het vectorveld $\mathbf{V}(x,y,z) = (2x, z, 1)$. Oriënteer ∂K met de naar buiten wijzende normaal.

a) Bewijs dat $\displaystyle\int_{\partial K} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}\, dA = \frac{\pi}{6}$.

b) Verifieer de divergentiestelling voor K en $\mathbf{V}$.

4, alleen voor wiskunde.

a) Kunnen we in de gedomineerde convergentiestelling, de voorwaarde dat f_k puntsgewijs naar f convergeert, vervangen door de voorwaarde dat $f_k(x) \to f(x)$ voor bijna alle x? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

b) In de les hebben we een methode gezien om integralen van de vorm $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\ln(x)\,dx$ uit te rekenen. Laat je hierdoor inspireren om de volgende eigenschap te bewijzen.

Zij $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$ en $f : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ een analytische functie die voldoet aan $|zf(z)| \to 0$ van zodra $|z| \to +\infty$. Bewijs dat

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = -\sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f(z)\ln(z), z_j)$$

waarbij we ln zodanig kiezen dat $\mathrm{Im}(\ln(z)) \in]0, 2\pi[$.

Hint: Integreer de functie $f(z)\ln(z)$ over het gepaste contour.

4, alleen voor natuurkunde.

a) Bepaal $a \in \mathbb{R}$ zodat het vectorveld

$$\mathbf{V} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{V}(x, y) = (\cos(x + y^2), ay\cos(x + y^2))$$

conservatief is. Bepaal in dat geval een potentiaalfunctie.

b) Bewijs dat $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(1 + x)^3}\,dx = -\frac{1}{2}$.

5. Deze vraag bestaat uit een lijst ‘kleine’ oefeningen. Als je een onderdeel niet kan oplossen, mag je toch verdergaan en de voorgaande resultaten gewoon gebruiken.

Notatie: We noteren met $C_c(\mathbb{R})$ de verzameling van continue functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *met compacte drager*, d.w.z. continue functies waarvoor een $N > 0$ bestaat zodat $f(x) = 0$ als $|x| \geq N$.

Cadeau: (Dit hoef je niet te bewijzen en gebruiken we pas in e).)
Voor elke $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ en elke $\varepsilon > 0$, bestaat een $g \in C_c(\mathbb{R})$ zodanig dat $\|f - g\|_2 < \varepsilon$.

a) Zij $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ en $x \in \mathbb{R}$. Toon aan dat de functie $y \mapsto f(y)g(x - y)$ integreerbaar is. Definieer

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x - y)\,dy .$$

b) Toon aan dat voor $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ en $g \in C_c(\mathbb{R})$, $f * g$ een continue functie is.
Hint: toon aan dat $(f * g)(x_n) \to (f * g)(x)$ wanneer $x_n \to x$.

c) Toon aan dat $|(f * g)(x)| \leq \|f\|_2\, \|g\|_2$ voor alle $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ en $x \in \mathbb{R}$.

d) Stel dat $g_n, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ en $\|g - g_n\|_2 \to 0$. Zij $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$. Toon aan dat $f * g_n \to f * g$ uniform op $\mathbb{R}$. *Hint:* merk op dat $f * g - f * k = f * (g - k)$.

e) Gebruik het cadeau om aan te tonen dat $f * g$ continu is voor alle $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$.