Feedback op het examen Algemene natuurkunde 1
Januari 2014

Beste,

Er waren 112 studenten ingeschreven voor het examen, 93 hebben deelgenomen. Dit wil dus zeggen dat ongeveer 17% van de ingeschreven studenten meteen forfait gegeven heeft.

Het gemiddelde resultaat was 8.72 op 20. Hierin zijn de punten voor de huistaak (10% van het totaal) verrekend. De gemiddelde (kwadratische) afwijking was 3.89 punten. Van de 93 deelnemende studenten hebben er 34 een score lager dan 8/20 behaald, 17 een score hoger of gelijk aan 8 en lager dan 10, 30 hoger of gelijk aan 10 en lager dan 14 en tenslotte 12 hoger of gelijk aan 14.

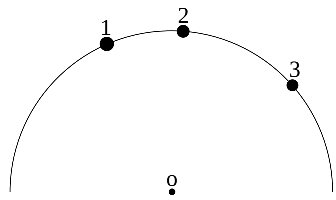
Gemiddelden op huistaken vergelijken met gemiddelden op examenvragen is een beetje moeilijk omdat de groep deelnemende studenten niet dezelfde was. Wordt dit toch gedaan voor de 93 studenten die aan het hoofdexamen deelnamen, en met een 0 voor hen die niet deelnamen aan een huiswerk, dan zien de gemiddelde punten er als volgt uit:
huistaak 1: 6.08/10
huistaak 2: 5.40/10
vraag 1: 5.13/10
vraag 2: 5.17/10
vraag 3: 2.78/10.
Hieruit blijkt duidelijk dat de derde examenvraag veel minder goed beantwoord werd. Dit is geen verrassing, behoudswetten, en vooral deze van impulsmoment, zijn elk jaar een moeilijk onderwerp.

Hier volgt een korte schets van de oplossing van de examenvragen met wat commentaren over de ingeleverde oplossingen.

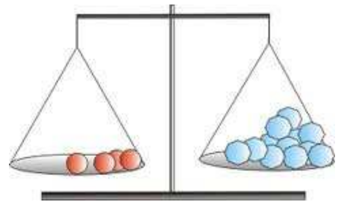
Vraag 1 [4ptn]

1. $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ en $\vec{\mathbf{c}}$ zijn algemene vectoren in drie dimensies (geen speciale onderlinge stand). Geef een eenvoudig argument waarom $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}})$ in het $(\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$-vlak ligt.

2. De figuur toont de positie van een puntmassa die een cirkelvormige baan beschrijft met centrum O op tijden t_1, t_2 en t_3 met $t_3 - t_2 = t_2 - t_1$. Schets de versnellingsvector van de massa op tijd t_2.



3. Een klassieke balans is in evenwicht wanneer er in de linker schaal een massa met dichtheid ρ_L ligt en in de rechter schaal een massa met dichtheid ρ_R. Stel dat $\rho_L > \rho_R$. De balans wordt onder een stolp geplaatst en de lucht wordt weggezogen. Blijft de balans in evenwicht of niet?



4. De wet van Poiseuille geeft het volumedebiet Q van een viskeuze vloeistof die doorheen een dunne buis stroomt van lengte ℓ en straal R wanneer er een drukverschil ΔP tussen beide uiteinden heerst:

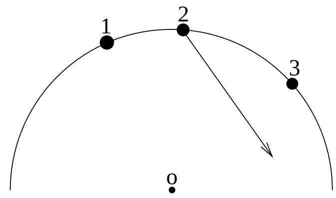
$$Q = \gamma \frac{R^4 \, \Delta P}{\ell}.$$

   Bepaal de dimensie van de constante γ.

Oplossing vraag 1

1. De vector $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}})$ staat loodrecht op de vector $\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}$. Deze laatste staat loodrecht op het ($\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$)-vlak. Daarom ligt $\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}})$ in het ($\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$)-vlak.

2. De versnelling heeft een radiële component omdat de beweging op een cirkel plaats vindt en de baanversnelling is volgens de figuur niet nul en in uurwerkwijzerzin, zie de pijl in de figuur.



3. Het volume van de massa in de rechter schaal is groter, er is daarom een grotere Archimedeskracht op de massa in de rechter schaal. Wanneer deze wegvalt, bij leegzuigen van de stolp, zal de rechter schaal naar beneden uitslaan.

4. De dimensies van de verschillende factoren (aangeduid met vierkante haken) zijn

$$[Q] = L^3T^{-1}, \;\; [R] = [\ell] = L \;\text{ en }\; [\Delta P] = ML^{-1}T^{-2}.$$

We vinden daarom

$$[\gamma] = M^{-1}TL.$$

Commentaren op vraag 1

Voor deelvraag 1 werd een eenvoudig argument gevraagd. De identiteit van Lagrange

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{b}}) \times \vec{\mathbf{c}} = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})\, \vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})\, \vec{\mathbf{c}}$$

toont het gevraagde aan maar is niet echt een eenvoudig argument (we hebben ze niet aangetoond en ze komt ook niet voor in Giancoli). Dit werd dus maar als half-goed gerekend.

Voor deelvraag 3 werd er heel dikwijls over het hoofd gezien dat lichamen in lucht een opwaartse stuwkracht ondervinden. Dit lijkt onbelangrijk maar kan toch voor het wegen van massa's met een lage massadichtheid een belangrijke fout veroorzaken, ongeveer 3% voor piepschuim.

In deelvraag 4 werd heel vaak 'dimensie' met 'eenheid' verward, zo is de dimensie van een afstand lengte (L) terwijl meters, duimen en 'Brabantsche ellen' lengte-eenheden zijn.

Vraag 2 [8ptn]

Deze vraag gaat over mechanica in 1D, alle puntmassa's bewegen zich op eenzelfde rechte, de x-as. We nemen in heel deze vraag aan dat puntmassa's m_1 en m_2 elkaar aantrekken met een kracht ter grootte $\gamma m_1 m_2$ waar γ een universele constante is, zoals de Newtonconstante G in 3D. We nemen ook aan dat puntmassa's ongehinderd door elkaar kunnen bewegen.

We vertrekken van een begintoestand waar twee even grote massa's stil staan op een afstand d van elkaar. Op $t = 0$ worden ze voorzichtig losgelaten zodat ze geen beginsnelheid meekrijgen. Omwille van hun onderlinge aantrekkingskracht bewegen ze naar elkaar toe.

1. Hoelang duurt het vooraleer beide massa's voor het eerst bij elkaar komen?

2. Hoe verloopt de verdere beweging?

Om twee massa's m_1 en m_2 die zich oorspronkelijk in eenzelfde punt bevinden op een afstand d van elkaar te brengen moet er arbeid geleverd worden op het (m_1,m_2)-systeem.

3. Toon aan dat de potentiële energie van twee puntmassa's m_1 en m_2 op een afstand d van elkaar gegeven wordt door $\gamma m_1 m_2 d$. Doe dit door de totale arbeid te berekenen die geleverd moet worden op een (m_1,m_2)-systeem om het van een oorspronkelijke toestand waar de massa's zich in eenzelfde punt bevinden naar een eindtoestand waar ze op afstand d van elkaar staan te brengen. Gebruik hiervoor de definitie van arbeid geleverd door een kracht op een puntmassa.

We nemen nu een systeem van drie puntmassa's m_1, m_2 en m_3.

4. Schrijf de totale mechanische energie op van het systeem.

5. Kan er van een groepje van drie massa's een massa 'ontsnappen' of blijven massa's steeds in elkaars buurt?

Oplossing vraag 2

1. Omdat alles zich in 1D afspeelt werken we gewoon met positiecoördinaten op de x-as i.p.v. vectoren. We nemen aan dat de eerste massa zich op $t = 0$ in de oorsprong bevindt en de tweede in d en duiden met x_1 en x_2 hun coördinaten aan. Stel dat de massa's zich op tijd t_1 voor de eerste keer in eenzelfde punt bevinden dan gelden voor tijden tussen 0 en t_1 de volgende bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \gamma m, \quad \frac{dx_1}{dt}(0) = 0 \text{ en } x_1(0) = 0$$
$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\gamma m, \quad \frac{dx_2}{dt}(0) = 0 \text{ en } x_2(0) = d.$$

Beide voeren dus een eenparig versnelde beweging uit:

$$x_1(t) = \frac{1}{2}\gamma m t^2 \text{ en } x_2(t) = d - \frac{1}{2}\gamma m t^2, \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

De tijd t_1 is bepaald door $x_1(t_1) = x_2(t_1)(= d/2)$, waaruit we halen

$$t_1 = \sqrt{\frac{d}{\gamma m}}.$$

2. De massa's gaan vervolgens door elkaar heen. Nu slaan de krachten van richting om, de onderlinge afstand vergroot tot hij terug de maximale waarde d bereikt op tijd t_2. We vinden voor de posities

$$x_1(t) = \frac{d}{2} + m\sqrt{\frac{\gamma d}{m}}(t - t_1) - \frac{1}{2}\gamma m(t - t_1)^2 \text{ en}$$
$$x_2(t) = \frac{d}{2} - m\sqrt{\frac{\gamma d}{m}}(t - t_1) + \frac{1}{2}\gamma m(t - t_1)^2.$$

Je vindt

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{d}{\gamma m}} = t_1$$

en op tijd t_2 staat de eerste massa stil in d en de tweede in 0. Nu speelt zich hetzelfde scenario af met de rollen van beide massa's verwisseld. We krijgen dus een periodieke beweging met periode $4t_1$.

3. De potentiële energie uitrekenen van een (m_1, m_2)-systeem kan op verschillende manieren:
1) De eerste massa vasthouden in het punt waar ze oorspronkelijk zijn en dan de arbeid berekenen die geleverd wordt door een kracht die net groot genoeg is om de tweede massa tot op een afstand d van de eerste te brengen. Net groot genoeg wil zeggen zonder die tweede massa een versnelling te geven. Zo vinden we

$$\int_0^d dx\, \gamma m_1 m_2 = \gamma m_1 m_2 d.$$

2) De meest algemene werkwijze is echter de potentieëele energie in te voeren als min de arbeid geleverd door de interactiekrachten in een tijdspanne $[t_i, t_f]$ waar voor t_i de massa's zich in eenzelfde punt bevinden en waar ze een afstand d van elkaar gescheiden zijn op tijd t_f. Hiervoor

moeten we $v_1F_{21} + v_2F_{12}$ integreren tussen t_i en t_f. Nu is

$$\begin{aligned} v_1F_{21} + v_2F_{12} &= \begin{cases} -\gamma m_1 m_2 \dfrac{d(x_2 - x_1)}{dt} & \text{als } x_2 - x_1 > 0 \\ -\gamma m_1 m_2 \dfrac{d(x_1 - x_2)}{dt} & \text{als } x_1 - x_2 > 0 \end{cases} \\ &= -\gamma m_1 m_2 \frac{d|x_1 - x_2|}{dt}. \end{aligned}$$

We vinden dus

$$W(t_i, t_f) = -\int_{t_i}^{t_f} dt\, \gamma m_1 m_2 \frac{d|x_1 - x_2|}{dt} = -\gamma m_1 m_2 d.$$

De gevraagde potentiële energie van het (m_1,m_2)-systeem is dan $\gamma m_1 m_2 d$.
3) Je zou ook kunnen opmerken dat de kracht centraal is:

$$\vec{\mathbf{F}}_{12} = f(|x_1 - x_2|)\, \hat{\mathbf{r}}_{12} = -\gamma m_1 m_2\, \hat{\mathbf{r}}_{12}.$$

Voor zulk een centrale kracht is de potentiaal bepaald door $U'(r) = -\gamma m_1 m_2$ en vinden we dezelfde uitdrukking.
4) Nog een andere mogelijkheid is de expliciete oplossingen van de bewegingsvergelijkingen gebruiken en het energieprincipe.

4. Voor drie deeltjes is de totale mechanische energie

$$\begin{aligned} E^{\text{mech, tot}} =& \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \gamma m_1 m_2 |x_1 - x_2| \\ &+ \gamma m_1 m_3 |x_1 - x_3| + \gamma m_2 m_3 |x_2 - x_3|. \end{aligned}$$

5. De onderlinge afstand tussen twee massa's kan nooit willekeurig groot worden want dan zou de totale mechanische energie naar ∞ gaan wat in strijd is met behoud van energie.

Commentaren op vraag 2

Je kan een symmetrie-argument gebruiken in deelvraag 1 en bijvoorbeeld het massamiddelpunt als oorsprong kiezen. Dan hoef je alleen maar uit te rekenen hoe lang het duurt eer een van de massa's een afstand $d/2$ afgelegd heeft vanuit stilstand met een constante versnelling γm.

Voor deelvraag twee hebben sommige studenten aangenomen dat de massa's volledig inelastisch of elastisch botsen ofschoon er duidelijk gezegd werd dat ze, zoals spoken, ongehinderd door elkaar kunnen gaan. Weinig studenten hebben ook de details uitgewerkt, namelijk dat de deeltjes terug tot stilstand komen wanneer ze weer een afstand d van elkaar gescheiden zijn. Sommige studenten hebben ook gebruikt dat de beweging deze van een eenvoudige harmonische oscillator is, dit is niet correct: de 'terugroepkracht' is hier constant en niet evenredig met de afstand tussen beide massa's.

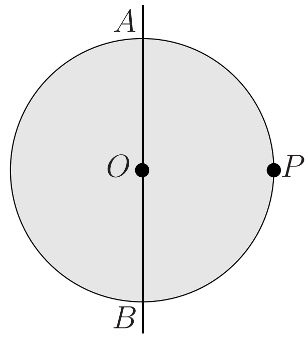
Bij de verdere vragen zijn sommige mensen zonder duidelijke redenen plots op een gravitatie-interactie overgestapt of op zwaartekracht. Er zijn heel veel fouten gebeurd bij het opschrijven van de mechanische energie van een systeem van drie puntmassa's, onder meer het dubbel tellen van de potentiële energie of het spreken over de potentiële energie van elk van de massa's. De potentiële energie beschrijft hier de interactie tussen paren van deeltjes en er zijn hier drie paren: (m_1, m_2), (m_1, m_3) en (m_2, m_3). Een andere veelgemaakte fout is dat er één enkele d gebruikt werd voor deze drie paren of dat er aangenomen werd dat $d_{12} + d_{23} = d_{13}$ (met d_{12} de afstand tussen m_1 en m_2). Dit laatste is waar in 1D indien m_2 tussen m_1 en m_3 ligt maar omdat deeltjes door elkaar heen kunnen bewegen hoeft dit niet steeds het geval te zijn.

Voor de laatste deelvraag hebben slechts enkele studenten opgemerkt dat de totale energie willekeurig groot zou worden indien twee deeltjes willekeurig ver van elkaar verwijderd zijn wat niet kan omwille van behoud van energie.

Vraag 3 [8ptn]

In deze vraag mag je zwaartekracht volledig verwaarlozen. Termen als 'horizontaal' en 'verticaal' worden alleen maar gebruikt om relatieve standen van voorwerpen te beschrijven.

Een dunne homogene schijf van straal R en massa M is vrij draaiend gemonteerd op een ideale verticale vaste as in de punten A en B. De as ligt in het vlak van de schijf en gaat doorheen haar middelpunt O. Oorspronkelijk staat de schijf stil.



1. Toon aan dat het traagheidsmoment van de schijf t.o.v. van de as gelijk is aan $MR^2/4$.

Een kogel van massa m boort zich in de schijf vast met een snelheid v. De kogel slaat loodrecht op de schijf in, op de rand ter hoogte van het centrum (het punt P in de figuur). Na de inslag draait de schijf met een hoeksnelheid ω rond de vaste as.

2. Bepaal ω.

3. Hoeveel mechanische energie gaat er verloren bij deze inelastische botsing?

Opdat de schijf steeds rond de vaste as zou draaien oefent de as in A en B krachten uit op de schijf.

4. Bepaal de krachtstoot uitgeoefend door de as op de schijf in A en B tijdens de korte tijd waarin de kogel zich in de schijf vast boort.

5. Oefent de as, na de inslag, nog krachten uit in A en B?

Oplossing vraag 3

1. Een mogelijke werkwijze is de schijf opdelen in dunne concentrische ringen. We berekenen eerst het traagheidsmoment van een dunne homogene ring van straal r en massa m t.o.v. een as in het vlak van de ring door zijn middelpunt. Zij ρ de lineaire massadichtheid van de ring.

We parametriseren de punten van de ring met een hoek θ die loopt van 0 tot 2π. Kiezen we de rotatie-as volgens de y-as en rekenen we de hoek vanaf de x-as in tegenuurwerkwijzerzin dan vinden we voor het traagheidsmoment

$$I_{\text{ring}} = \int_0^{2\pi} d\theta \, \rho \, r \, r^2 \cos^2(\theta) = 4\rho r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \, \cos^2(\theta).$$

We gebruiken nu de formule voor de cosinus van de dubbele hoek: $2\cos^2(\theta) = 1 + \cos(2\theta)$ en vinden zo

$$I_{\text{ring}} = \pi \rho r^3 = \frac{mr^2}{2}.$$

Voor een homogene schijf met oppervlaktemassadichtheid ρ is de massa van een dunne ring van straal r en dikte dr gegeven door $2\pi\rho r dr$. Zo vinden we

$$I_{\text{schijf}} = \int_0^R dr \, \pi \rho r^3 = \frac{\pi \rho R^4}{4} = \frac{MR^2}{4}$$

2. Omwille van de symmetrie van het probleem zullen de krachten in A en B gelijk zijn en dus dragen geen uitwendige krachten bij tot het krachtenmoment t.o.v. het middelpunt van de schijf. We hebben dus behoud van impulsmoment t.o.v. O. Vóór de botsing is het impulsmoment een vector ter grootte mvR gericht volgens de rotatie-as en naar boven wijzend. Ná de botsing is de grootte van het impulsmoment $(\frac{MR^2}{4} + mR^2)\omega$ met dezelfde oriëntatie. We vinden dus

$$\omega = \frac{mv}{(m + M/4)R}.$$

3. De mechanische energie is louter kinetisch, zowel voor als na de botsing. Het verlies aan kinetische energie is

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}I_{\text{schijf}}\,\omega^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 = \frac{1}{2}\frac{M}{4m+M}mv^2.$$

4. Het totale impuls vlak voor de botsing is mv gericht volgens de loodlijn op de schijf. Vlak na de botsing moeten we kijken naar het impuls van het massamiddelpunt van de schijf met de kogel erin. Alleen de kogel

zal hier bijdragen, dit impuls is dan gericht zoals het impuls van de inslaande kogel maar met een grootte

$$mR\omega = \frac{m^2 v}{m + M/4}.$$

De grootte van de krachtstoot in A en B is dan

$$\frac{1}{2}\left(mv - \frac{m^2 v}{m + M/4}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{M}{4m + M}\,mv.$$

5. Na de inslag blijft het systeem schijf plus kogel aan constante hoeksnelheid draaien omheen de vaste as. Het massamiddelpunt beschrijft een eenparig cirkelvormige beweging met straal $mR/(m+M)$. Dit wil dus zeggen dat er een centripetale kracht op het systeem moet uitgeoefend worden, kracht die geleverd wordt door de as via A en B. Ook hier zal de enige bijdrage van de kogel komen

$$\frac{1}{2}\,m\,R\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,\frac{m^3 v^2}{R(m + M/4)^2}.$$

Commentaren op vraag 3

Er zijn heel wat manieren om deelvraag 1 te beantwoorden. Een paar studenten hebben de loodrechte-assenstelling gebruikt. Dit is zeer elegant en efficiënt omwille van de symmetrie maar werd niet gezien of gekend ondersteld. Een directere aanpak is de schijf op een zinnige manier opdelen, drie duidelijke mogelijkheden zijn dunne ringen zoals hierboven, horizontale dunne staafjes en verticale dunne staafjes. Nogal wat mensen hebben aan 'reverse engineering' gedaan door een 'goede schatting' in een integraal in te vullen.

Het grote probleem met deze vraag was het correct toepassen van behoudswetten. Alle denkbare combinaties werden gebruikt meestal zonder argumentatie. Het verschil tussen een schijf die volledig los hangt en een schijf die alleen maar kan roteren rond een vaste as is dat de laatste geen translatiebeweging kan uitvoeren. Dit kan alleen maar indien de as een krachtstoot aan de schijf levert op het ogenblik van inslag. Er is dus geen behoud van totaal impuls. Na inslag moet de as ook een kracht leveren in de draaipunten omdat het massamiddelpunt van schijf plus kogel niet langer op de rotatie-as gelegen is en er dus een centripetale kracht nodig is om het massamiddelpunt een eenparige cirkelvormige beweging te laten uitvoeren.

Algemene commentaren

Het grote probleem voor veel studenten is het correct interpreteren van vragen en situaties. De moeilijkste begrippen lijken potentiële energie en behoudswetten te zijn. Bij deze laatste komt het er dikwijls op aan om een volledig beeld te krijgen van alle krachten waarmee men rekening moet houden, vooral van krachten die aanwezig moeten zijn om aan bepaalde voorwaarden te voldoen zoals draaien rond een vaste as, zich bewegen op een gegeven oppervlak, elastisch botsen, ...

Het 'wiskundig werk' aan dit examen was eerder gering behalve bij de berekening van het traagheidsmoment van de schijf. Wat wel opvalt, is een grote slordigheid bij het neerschrijven van integralen zoals geen integratiegrenzen of integratiegrenzen die niets te maken hebben met de integratieveranderlijken. Dit is een beproefd recept voor problemen.

Tenslotte valt ook de heel grote creativiteit op taalgebied op, zowel wat spelling als spraakkunst of woordenschat betreft. Dit heeft geen rol gespeeld voor dit examen maar het zal zeker aangerekend worden bij het opstellen van verslagen en presentaties.