Examen Algemene natuurkunde 1
18 januari 2016

Lees zorgvuldig de vragen en aarzel niet om uitleg te vragen indien je iets onduidelijk vindt. Denk er ook aan om je antwoorden voldoende te motiveren, alleen de uitkomst van een berekening geven, is veel te weinig. Een voorbeeldje: indien je behoud van mechanische energie gebruikt, leg dan uit dat er ofwel geen niet-conservatieve krachten aan het werk zijn ofwel dat de niet-conservatieve krachten geen arbeid leveren.

Veel succes!

Vraag 1 [4pt]

1. We krijgen twee identieke emmers A en B. Emmer A bevat alleen water terwijl emmer B een blok hout bevat dat drijft in water. Stel dat het water in beide emmers even hoog staat, hoe verhouden de massa's van beide emmers zich?

2. De modulus van Young E geeft de vervorming weer van een vaste stof die samengedrukt wordt:

$$E = \frac{F}{A}\frac{\ell_0}{\Delta\ell}\,.$$

   Hierbij is ℓ_0 de lengte van een cilindrisch blokje materie met dwarssectie A, F de kracht die op het blokje aangelegd wordt loodrecht op de dwarssectie en $\Delta\ell$ de lengteverandering van het blokje. Bepaal de dimensie van E.

3. Gegeven zijn twee eenheidsvectoren $\hat{\mathbf{e}}$ en $\hat{\mathbf{f}}$. Toon aan dat

$$\hat{\mathbf{g}} := \frac{1}{2\cos(\theta/2)}\left(\hat{\mathbf{e}} + \hat{\mathbf{f}}\right)$$

   de eenheidsvector is gericht volgens de bissectrice van $\hat{\mathbf{e}}O\hat{\mathbf{f}}$. Hierbij is θ de hoek tussen $\hat{\mathbf{e}}$ en $\hat{\mathbf{f}}$.

Oplossing vraag 1

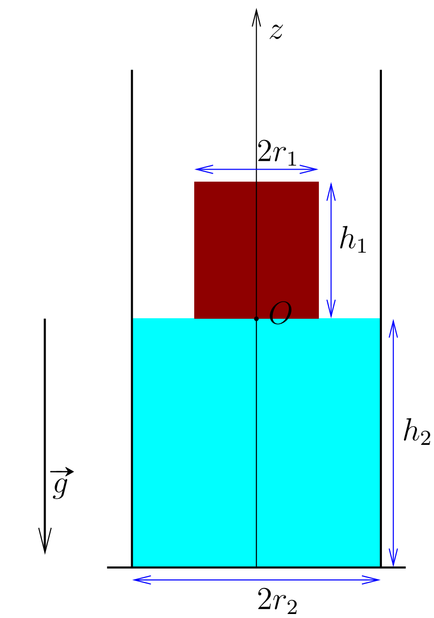
1. Het blokje drijft, dit wil zeggen dat het een opwaartse stuwkracht ondervindt gelijk aan zijn gewicht maar tegengesteld gericht. De grootte van die stuwkracht is gelijk aan het gewicht van het verplaatste volume water, dit is de wet van Archimedes. Je kan het blokje daarom vervangen door een volume water dat precies gelijk is aan het verplaatste volume zonder het totale gewicht van emmer B te wijzigen. Dit doen levert precies emmer A op. Beide emmers hebben dus hetzelfde gewicht en dus ook dezelfde massa.

2. Je rekent gewoon de dimensie van E uit vertrekkend van zijn definitie. Hierbij gebruik je $[F] = MLT^{-2}$, $[A] = L^2$ en $[\ell_0] = [\Delta\ell] = L$ en vind je
$$[E] = \frac{[F]}{[A]}\frac{[\ell_0]}{[\Delta\ell]} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}\,.$$

3. Het is meteen duidelijk dat $\hat{\mathbf{g}}$ in het vlak ligt opgespannen door $\hat{\mathbf{e}}$ en $\hat{\mathbf{f}}$. Je moet tonen dat $\hat{\mathbf{g}}$ een eenheidsvector is en vervolgens dat de hoek tussen $\hat{\mathbf{e}}$ en $\hat{\mathbf{g}}$ gelijk is aan de hoek tussen $\hat{\mathbf{g}}$ en $\hat{\mathbf{f}}$. Dat $\hat{\mathbf{g}}$ een eenheidsvector is volgt uit
$$\begin{aligned}|\hat{\mathbf{g}}|^2 = \hat{\mathbf{g}}\cdot\hat{\mathbf{g}} &= \frac{1}{2\cos^2(\theta/2)}\left(\hat{\mathbf{e}}+\hat{\mathbf{f}}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{e}}+\hat{\mathbf{f}}\right)\\ &= \frac{1}{4\cos^2(\theta/2)}\Big(\hat{\mathbf{e}}\cdot\hat{\mathbf{e}}+\hat{\mathbf{e}}\cdot\hat{\mathbf{f}}+\hat{\mathbf{f}}\cdot\hat{\mathbf{e}}+\hat{\mathbf{f}}\cdot\hat{\mathbf{f}}\Big)\\ &= \frac{1}{4\cos^2(\theta/2)}\Big(2+2\cos(\theta)\Big) = 1\,.\end{aligned}$$
Vervolgens toon je aan dat de hoeken tussen $\hat{\mathbf{e}}$ en $\hat{\mathbf{g}}$ en tussen $\hat{\mathbf{g}}$ en $\hat{\mathbf{f}}$ gelijk zijn aan elkaar door de cosinussen van beide hoeken te vergelijken. Deze cosinussen zijn gegeven door de scalaire producten:
$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}\cdot\hat{\mathbf{g}} &= \frac{1}{2\cos(\theta/2)}\,\hat{\mathbf{e}}\cdot\left(\hat{\mathbf{e}}+\hat{\mathbf{f}}\right) = \frac{1}{2\cos(\theta/2)}\Big(1+\cos(\theta)\Big)\\ \hat{\mathbf{g}}\cdot\hat{\mathbf{f}} &= \frac{1}{2\cos(\theta/2)}\left(\hat{\mathbf{e}}+\hat{\mathbf{f}}\right)\cdot\hat{\mathbf{f}} = \frac{1}{2\cos(\theta/2)}\Big(\cos(\theta)+1\Big)\,.\end{aligned}$$

Vraag 2 [7pt]

Een homogeen cilindrisch blokje van hoogte h_1, doormeter $2r_1$ en volumemassadichtheid ρ_1 schuift zonder wrijving rond een dunne verticale as. Hierdoor kan het blokje slechts op en neer bewegen zonder te kantelen. Verder hebben we een verticale cilinder van doormeter $2r_2$, onderaan gesloten en deels gevuld met een vloeistof van dichtheid ρ_2. Stel dat $r_1 < r_2$ en $\rho_1 < \rho_2$. De as waarover het blokje kan schuiven valt samen met de as van het blokje en van de buis die de vloeistof bevat. We voeren een coördinaat z in op die as die de hoogte van de onderkant van het blokje bepaalt en kiezen de oorsprong zodanig dat bij $z = 0$ de onderkant van het blokje net de vloeistof raakt zoals geschetst in de figuur. In dit geval staat de vloeistof tot een hoogte h_2 boven de bodem. Het is nuttig om de notatie m_1 in te voeren voor de massa van het blokje: $m_1 = \pi r_1^2 h_1 \rho_1$.



Blokje net in contact met vloeistof

1. Stel dat het hoogteverschil tussen de onderkant van het blokje en het vloeistofniveau gelijk is aan h met $0 < h < h_1$ zodat het blokje gedeeltelijk ondergedompeld is. Welke waarde van z stemt hiermee overeen?

2. Toon aan dat het blokje net onder staat als

$$z = z_1 := -\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2}\, h_1\,.$$

3. Over welke hoogte d zakt het blokje in de vloeistof als het systeem in

evenwicht is? Onderstel hierbij dat h_2 voldoende groot is zodat het blokje kan drijven i.p.v. op de bodem te staan.

4. Welke waarde z_0 van z komt overeen met evenwicht?

Men kan aantonen dat de potentiële energie U van het systeem blokje + vloeistof als functie van z gegeven wordt door

$$U(z) = \begin{cases} -m_1 g \left(\dfrac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}\right) z + m_1 g \,\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\,\dfrac{z_1}{2} & \text{voor } z \leq z_1 \\ m_1 g z - m_1 g \,\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\,\dfrac{z^2}{2 z_1} & \text{voor } z_1 \leq z \leq 0 \\ m_1 g z & \text{voor } z \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Hierbij werden drie verschillende situaties onderscheiden: blokje helemaal ondergedompeld, blokje deels ondergedompeld en blokje volledig buiten de vloeistof. Verder werd U zodanig genormaliseerd dat $U(0) = 0$.

5. Leg in woorden uit wat je moet doen om aan $(*)$ kan komen. Je hoeft dit niet uit te werken, gewoon een werkwijze aangeven volstaat.

6. Maak een duidelijke grafiek van de potentiële energie als functie van z.

7. Voor welke waarde van z is de potentiële energie minimaal? Leg uit waarom je dezelfde waarde vindt als in 4.

8. Als je veel tijd over hebt en als je dit voor weinig punten wil doen, verifieer dan dat $(*)$ de correcte uitdrukking van de potentiële energie geeft.

Oplossing vraag 2

1. Als de onderzijde van het blokje zich op een diepte h in de vloeistof bevindt met $0 \leq h \leq h_1$ dan moet het vloeistofniveau stijgen omdat de vloeistof onsamendrukbaar is. Je berekent de hoogte ℓ van de onderzijde van het blokje boven de bodem van de cilinder door te eisen dat het totale volume van de vloeistof gelijk is aan $\pi r_2^2 h_2$:

$$\pi r_2^2 h_2 = \pi r_2^2 \ell + \left(\pi r_2^2 h - \pi r_1^2 h \right) .$$

   Hieruit haal je dat

$$\ell = h_2 - h + \frac{r_1^2}{r_2^2} \, h \, .$$

   De overeenstemmende z-coördinaat is dan

$$z = -h_2 + \ell = -\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2} \, h \, . \tag{1}$$

2. Het blokje is net ondergedompeld als $h = h_1$ en dan is

$$z_1 = -\frac{(r_2^2 - r_1^2)}{r_2^2} \, h_1 \, .$$

3. Stel dat het blokje in evenwicht een hoogte d in de vloeistof zakt. Het verplaatste volume vloeistof heeft dan een gewicht $\pi r_1^2 d \rho_2 g$ en dit moet precies het gewicht $m_1 = \pi r_1^2 h_1 \rho_1 g$ van het blokje compenseren. Daarom is

$$d = \frac{\rho_1}{\rho_2} \, h_1 \, . \tag{2}$$

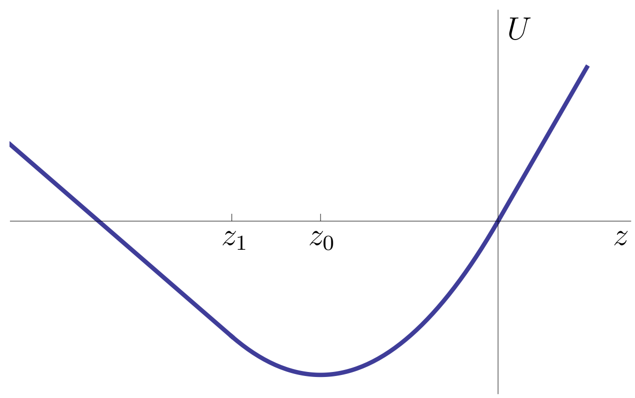
4. Als het blokje in evenwicht is, dan kan je $h = d$ stellen in (1) met d zoals in (2) en dus is

$$z_0 = -\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2} \, \frac{\rho_1}{\rho_2} \, h_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \, z_1 \, .$$

5. De potentiële energie U is de som van de potentiële energie U_b van het blokje en U_v van de vloeistof. De potentiële energie van het blokje is gelijk aan de massa m_1 van het blokje vermenigvuldigd met de hoogte

van zijn massamiddelpunt en vermenigvuldigd met de valversnelling. Hetzelfde geldt voor de vloeistof. Zowel U_b als U_v zijn volledig bepaald door z. Door gepaste constanten bij U_b en U_v te tellen, zorg je ervoor dat $U_b = U_v = 0$ bij $z = 0$. Om de hoogte van het massamiddelpunt van de vloeistof te bepalen met het blokje deels of geheel ondergedompeld vul je eerst het ondergedompeld deel ook met vloeistof. Zo kan je het vloeistofvolume krijgen als een verschil van twee cilinders wat de berekening aanzienlijk vereenvoudigt.

6.



7. Uit de grafiek zie je dat het minimum van U tussen z_1 en 0 ligt. Je kan dat bepalen door de afgeleide gelijk aan nul te stellen:

$$m_1 g - m_1 g \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{z}{z_1} = 0$$

met als oplossing

$$z_0 = \frac{\rho_1}{\rho_2} z_1 \, .$$

Een systeem in evenwicht bevindt zich in een extremum van de potentiële energie, dit kan hier alleen maar een minimum zijn namelijk $z = z_0$.

Vraag 3 [4pt]

Voor kleine amplitudes wordt de periode van een vlakke fysische slinger gegeven door

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{gM\ell}}\,.$$

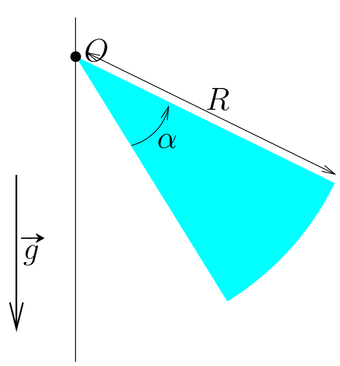
Hierbij is M de massa van de slinger, I het traagheidsmoment ten opzichte van de as door het ophangpunt, loodrecht op het slingervlak, en ℓ de afstand tussen het ophangpunt en het massamiddelpunt.

1. Bepaal de periode van een fysische slinger van massa M gesneden uit een dunne homogene plaat in de vorm heeft van een cirkelsector van straal R en openingshoek α. Het ophangpunt is de tophoek van de sector.

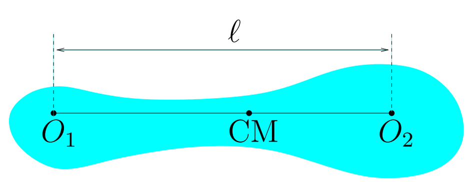
2. De Engelse natuurkundige Kater ontwierp in het begin van de 19$^{\mathrm{de}}$ eeuw een slinger die op een eenvoudige wijze een nauwkeurige bepaling van de valversnelling toeliet. Een vlakke fysische slinger wordt voorzien van twee ophangpunten O_1 en O_2 met het massamiddelpunt (CM) gelegen op de rechte O_1O_2. Verder worden O_1 en O_2 zo gekozen dat de slingerperiode T (kleine amplitude) met ophangpunt O_1 dezelfde is als die met ophangpunt O_2. Toon aan dat

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \ell$$

met ℓ de afstand tussen O_1 en O_2. Deze werkwijze vermijdt de moeilijke bepaling van traagheismomenten, je hoeft alleen nauwkeurig tijden en lengtes te meten.



Slingerende cirkelsector



Slinger van Kater

Oplossing vraag 3

1. Om de periode te kennen moet je zowel de ligging van het massamiddelpunt als de grootte van het traagheidsmoment bepalen. Omwille van symmetrie verdeel je de cirkelsector in concentrische bogen van openingshoek α. De boog van straal r en dikte dr heeft een massa $dm = \alpha\rho r dr$ met ρ de oppervlaktemassadichtheid. Het massamiddelpunt ligt op afstand r_{CM} van de tophoek en op de bissectrice van de hoek α. Je kan nu de volgende relaties opschrijven

$$\begin{aligned} M &= \int dm = \int_0^R dr\, \alpha\rho r = \frac{1}{2}\, \alpha\rho R^2 \\ M r_{\text{CM}} &= \int dm\, r = \int_0^R dr\, \alpha\rho r^2 = \frac{1}{3}\, \alpha\rho R^3 \\ I &= \int dm\, r^2 = \int_0^R dr\, \alpha\rho r^3 = \frac{1}{4}\, \alpha\rho R^4 = \frac{1}{2}\, M R^2 \,. \end{aligned}$$

   Hieruit haal je $r_{\text{CM}} = \frac{2}{3}\, R$ en dus

$$T = \pi \sqrt{\frac{3R}{g}}\,.$$

2. Steunend op de stelling van Steiner (stelling van de evenwijdige assen) kan je de traagheidsmomenten I_1 en I_2 ten opzichte van de assen door O_1 en O_2 uitdrukken in termen van het traagheidsmoment I_{CM} t.o.v. de as door het massamiddelpunt:

$$I_1 = I_{\text{CM}} + M\ell_1^2 \ \text{ en } \ I_2 = I_{\text{CM}} + M\ell_2^2\,.$$

   Hierbij zijn ℓ_1 en ℓ_2 de afstanden van O_1 en O_2 tot het massamiddelpunt. Uit het gegeven weet je dat

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{gM\ell_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{I_2}{gM\ell_2}}\,.$$

   Hieruit haal je $I_1\ell_2 = I_2\ell_1$. Als je I_1 en I_2 uitdrukt in termen van I_{CM} dan vind je

$$I_{\text{CM}} = M\ell_1\ell_2$$

en dus

$$I_1 = I_{\text{CM}} + M\ell_1^2 = M\ell_1(\ell_1 + \ell_2) = M\ell_1\ell \;\text{ en }\; I_2 = M\ell_2\ell\,.$$

Hierdoor wordt de slingerperiode

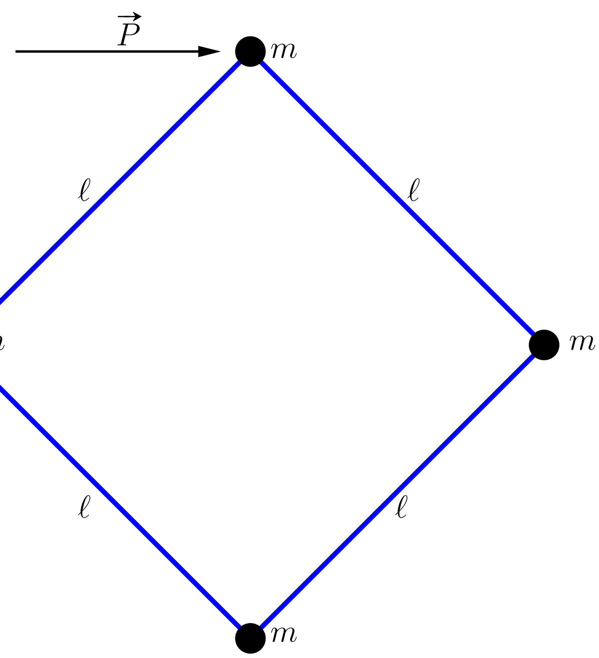
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

en dus

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \ell\,.$$

Vraag 4 [3pt]

Een star lichaam bestaat uit vier idealen staven van lengte ℓ die liggen volgens de zijden van een vierkant. In elk hoekpunt zit een puntmassa m. Het geheel kan wrijvingsloos bewegen over een horizontaal vlak en is oorspronkelijk in rust. Plots wordt er gedurende een zeer korte tijd een krachtstoot $\vec{P}$ gegeven aan een van de massa's zoals aangegeven in de figuur. Bepaal de verdere beweging van het starre lichaam.



Oplossing vraag 4

We gebruiken het impuls- en impulsmomentprincipe om de beweging van het starre lichaam na de krachtstoot te bepalen. Omdat er, na de botsing, geen uitwendige krachten met horizontale componenten op het starre lichaam inwerken zal het massamiddelpunt een eenparig rechtlijnige beweging in de richting van $\vec{P}$ uitvoeren en zal daarenboven het star lichaam aan constante hoeksnelheid in uurwerkwijzerzin draaien rond een verticale as door het massamiddelpunt. We moeten nu nog de groottes v van de snelheid van het massamiddelpunt en ω van de hoeksnelheid vinden.

Eerst stel je dat de verandering van de component van de totale impuls volgens de richting van $\vec{P}$ gelijk is aan P

$$4mv = P\,.$$

Daarom is

$$v = \frac{P}{4m}\,.$$

Om de hoeksnelheid te bepalen, doe je iets analoogs voor het impulsmoment. De krachtmomentstoot van de uitwendige krachten t.o.v. een verticale as door het massamiddelpunt is de toename van het totale impulsmoment

$$P\frac{\ell}{\sqrt{2}} = I_{\text{CM}}\omega = 2m\ell^2\omega\,.$$

Je vindt zo

$$\omega = \frac{P}{2\sqrt{2}m\ell}\,.$$