Examen Kansrekenen
Oplossingen

22 juni 2018

Vraag 1

a) Zie cursus.

b) Zie cursus.

c)
- $X_1 \sim Geom(0.63)$. X_1 is geometrisch verdeeld met faalkans 63%.
- $X_2 \sim H(557, 30, 10)$. X_2 is hypergeometrisch verdeeld met $N = 557$, $r = 30$ en $n = 10$.
- $E[7 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2] = 7 \cdot E[X_1] + 2 \cdot E[X_2]$
  Hierbij is $E[X_1] = \frac{0.63}{0.37}$ en $E[X_2] = \frac{30 \cdot 10}{557}$. En dus $E[7 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2] = 12,9961$.
  $Var[7 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2] = 7^2 \cdot Var[X_1] + 2^2 \cdot Var[X_2]$
  Hierbij is $Var[X_1] = \frac{0.63}{0.37^2}$ en $Var[X_2] = \frac{30 \cdot 10 \cdot 527 \cdot 547}{557^2 \cdot 556}$. En dus $Var[7 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2] = 227,4984$.

Vraag 2

a) Stel P_A, ... de kans dat component A, ... faalt. En neem S voor het systeem.
$P(\text{Werkend systeem}) = 1 - P_S = 1 - (1 - (1 - P_A) \cdot (1 - P_{BCDE})) = (1 - P_A) \cdot (1 - P_B \cdot P_{CDE}) = (1 - P_A) \cdot (1 - P_B \cdot (1 - (1 - P_{CD}) \cdot (1 - P_E))) = (1 - P_A) \cdot (1 - P_B \cdot (1 - (1 - P_C \cdot P_D) \cdot (1 - P_E)))$. De gegevens invullen geeft dan: $P(\text{Werkend systeem}) = 92,64\%$.

b) Uit de definitie van voorwaardelijke kans volgt:
$P(D|\bar{S}) = \frac{P(\bar{S}|D) \cdot P(D)}{P(\bar{S})}$
Hierbij is $P(\bar{S}|D) = (1 - 0,05) \cdot (1 - P_{BCE}) = (1 - 0,05) \cdot (1 - (0,1 \cdot (1 - (1 - 0,3) \cdot (1 - 0,2)))) = 0,9082$. Zodat $P(D|\bar{S}) = \frac{0,9082 \cdot 0,2}{0,9264} = 19,61\%$

Vraag 3

a) Opdat f_X een verdelingsfunctie is, moet de integraal over $\mathbb{R}$, 1 zijn.
$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ce^{-|u|} du = \int_{-\infty}^{0} ce^{u} du + \int_{0}^{+\infty} ce^{-u} du = c \cdot (1 + 1)$.
En dus moet $c = \frac{1}{2}$.

b) Er geldt $Y = h(X) = k \cdot X + l$, merk op dat h strikt stijgend is op $\mathbb{R}$ en dat de inverse is gegeven door $h^{-1}(x) = \frac{x-l}{k}$. Dan volgt uit de regel van monotone transformaties dat voor elke $y \in \mathbb{R}$, $f_Y(y)$ gegeven wordt door:
$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot |\frac{d}{dy} h^{-1}(y)| = \frac{c}{bk} e^{-\frac{|y-(\mu k + l)|}{bk}}$.
Dus geldt $Y \sim Laplace(\mu k + l, bk)$.

Vraag 4

a) $T \sim N(60, 20^2)$. $P(T > 60) = \frac{1}{2}$, direct gevolg van de symmetrie van de normale verdeling.

b) Zij X het aantal passagiers dat niet voor 10u00 aankomt. Dan $X \sim B(175, \frac{1}{2})$. Merk op dat $175 \geq 30$ en $175 \cdot \frac{1}{2} \geq 5$, zodat $X \approx Y \sim N(87,5; \sqrt{(43,75)^2}$. $P(X < 80) \approx P(Y \leq 79,5) = P(Z \leq -1,21) = 1 - P(Z \leq 1,21) = 1 - 0,887 = 11,3\%$. Hierbij is $Z = \frac{Y-87,5}{\sqrt{43,75}}$.
Merk op dat in R de normale verdeling als parameters μ en σ neemt, niet de variantie.

Vraag 5

Merk op dat $X_1 \sim \varepsilon(1)$, $X_2 \sim \varepsilon(0,5)$ en $X_3 \sim \Gamma_{2,12}$. Voorts geldt $M_{12X_1+6X_2+X_3}(t) = M_{X_1}(12t) \cdot M_{X_2}(6t) \cdot M_{X_3}(t)$, want X_1,X_2 en X_3 zijn onafhankelijk. En dus vinden we:

$$M_{12X_1+6X_2+X_3}(t) = \begin{cases} (1-12t)^{-4} & \text{t} < \frac{1}{12} \\ \infty & \text{anders} \end{cases}$$

Dit is juist de momentgenererende functie van $\Gamma_{4,12}$