

Vraag 1

(a) Toon aan dat voor commutatieve groepen G, H de volgende twee eigenschappen equivalent zijn.

- Er bestaat een surjectief groepshomomorfisme $\rho: G \rightarrow H$.
- Voor elke deelgroep N van H bestaat er een deelgroep K van G zodanig dat $G/K \cong H/N$.

Je mag gebruiken dat, voor elke deelgroep N van een commutatieve groep $(H, +)$, de afbeelding $H \rightarrow H/N: h \mapsto h + N$ een surjectief groepshomomorfisme is.

(b) Vind een deelgroep K van $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ die aan volgende twee eisen voldoet.

- $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/K$ is eindig.
- Voor elke deelgroep N van $(\mathbb{Z}, +)$ geldt dat $\mathbb{Z}/N \not\cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/K$.

(Hint: je kan als tussenstap aantonen dat $\mathbb{Z}/N$ cyclisch is, voor elke deelgroep N van $\mathbb{Z}$.)

Vraag 2

Zij V een n -dimensionale vectorruimte over een veld K , met karakteristiek verschillend van 2. Zij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ een symmetrische bilineaire vorm van rang n . Toon aan dat voor elke $L \in V^*$ er een unieke $v \in V$ bestaat, zodanig dat

$$L = \langle \cdot, v \rangle.$$

(Hiermee bedoelen we dat voor elke $w \in V$ geldt dat $L(w) = \langle w, v \rangle$.)

Vraag 3

(a) Zij $a \in \mathbb{Z}$ zodanig dat $a \equiv 3 \pmod{6}$. Toon aan dat er exact drie $x \in \mathbb{Z}_7$ bestaan waarvoor

$$x^a = 1.$$

(b) Vind $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_{105}$, onderling verschillend, zodanig dat

$$x_i^3 = 1,$$

voor $i = 1, 2, 3$.

(c) Zij $a \in \mathbb{Z}$ oneven. Toon aan dat er ten hoogste drie $x \in \mathbb{Z}_{105}$ bestaan waarvoor

$$x^a = 1.$$