

# Examen Fysische thermodynamica

Juni 2023

## 1 Examenvragen

1. Iets over een verwarmingssysteem door water of basalt in de zomer op te warmen en dat te gebruiken in de winter. Enkele praktische berekeningen over welke stof beter zou zijn, hoeveel plaats het zou innemen en ook een vraag over warmtegeleiding waarbij je de vergelijking moest gebruiken. Ik herinner me de details niet meer.
2. De Dieselcyclus.
  - Stap A: Het systeem expandeert aan constante druk.
  - Stap B: Adiabatische expansie van 10 bar naar 4 bar.
  - Stap C: Isochore drukverlaging.
  - Stap D: Adiabatische compressie van 300 K naar 400 K.

Vragen:

- (a) Teken de cyclus op een PV-diagram.
  - (b) Geef in tabelvorm druk, volume en temperatuur voor elke stap.
  - (c) Wat is de arbeid geleverd door dit systeem?
  - (d) Wat is de efficiënte van deze machine?
3. Korte inhoudelijke vragen over de koelcyclus en het throttle proces.
  4. Toon aan dat de Gibbs vrije energie naar een minimum streeft in een systeem en thermisch en mechanisch evenwicht met zijn omgeving.
  5. (Statistische mechanica) Gegeven zijn de vergelijkingen

$$p = \frac{e}{3} \quad \text{en} \quad e = \frac{T}{3} \frac{de}{dT} - \frac{e}{3}$$

Met  $p$  de stralingsdruk en  $e = E/V$  de energiedichtheid van een stralingsbron. Je moest gebruik maken van een thermodynamische identiteit en een Maxwell relatie om de tweede vanuit de eerste te bewijzen (denk ik??). Dan moest je de tweede vergelijking oplossen (als differentiaalvergelijking) om op de wet van Stefan-Boltzmann uit te komen.

6. (Statistische mechanica) Een deeltje heeft een potentiaalcurve  $u(x)$  in functie van positie  $x$  met een minimum in  $x_0$ .
  - (a) Geef een integraalformule voor de gemiddelde positie van  $x$ .
  - (b) Geef met behulp van de Taylor-expansie van  $u(x)$  rond  $x_0$  een tweede-graadsveelterm om  $u(x)$  te benaderen.
  - (c) Toon aan dat de gemiddelde positie gelijk is aan  $x_0$  als we de bovenstaande benadering gebruiken.

Zie ook Schroeder Problem 6.32 (a) en (b).

## 2 Oplossingen

- 1.
2. Allemaal in principe vrij elementaire berekeningen gebruik makend van  $\Delta U = Q + W$  en  $PV^\gamma = \text{cte}$ . Tip: houd het overzichtelijk want het zijn veel getallen en mijn vrienden en ik zijn allemaal andere dingen uitgekomen.
- 3.
4. Zie Schroeder p161-162 of de slides. Pavlik had denk ik graag dat we de tweede afgeleide gebruiken om aan te tonen dat het een minimum is maar dat komt op hetzelfde neer als de redenering in het boek.
5. Zie [https://en.wikipedia.org/wiki/Stefan%E2%80%93Boltzmann\\_law#Thermodynamic\\_derivation\\_of\\_the\\_energy\\_density](https://en.wikipedia.org/wiki/Stefan%E2%80%93Boltzmann_law#Thermodynamic_derivation_of_the_energy_density).
6. (a)

$$\langle x \rangle = \frac{\int x e^{-\beta u(x)} dx}{\int e^{-\beta u(x)} dx}.$$

- (b) De Taylor-expansie van  $u(x)$  rond  $x_0$  is

$$u(x) \approx u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}u''(x_0)(x - x_0)^2.$$

- (c) Laten we aannemen dat  $x$  van  $-\infty$  naar  $+\infty$  loopt. Herinner dat  $u(x)$  een minimum bereikt in  $x_0$ , dus  $u'(x_0) = 0$ . Nu is

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{\int x e^{-\beta(u(x_0) + u''(x_0)(x-x_0)^2/2)} dx}{\int e^{-\beta(u(x_0) + u''(x_0)(x-x_0)^2/2)} dx} \\ &= \frac{e^{-\beta u(x_0)} \int x e^{-\beta u''(x_0)(x-x_0)^2/2} dx}{e^{-\beta u(x_0)} \int e^{-\beta u''(x_0)(x-x_0)^2/2} dx} \\ &= \frac{\int x e^{-\beta u''(x_0)(x-x_0)^2/2} dx}{\int e^{-\beta u''(x_0)(x-x_0)^2/2} dx} \end{aligned}$$

Als we nu de substitutie  $y = x - x_0$  doen, krijgen we

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \frac{\int (y + x_0) e^{-\beta u''(x_0) y^2 / 2} dy}{\int e^{-\beta u''(x_0) y^2 / 2} dy} \\ &= \frac{\int y e^{-\beta u''(x_0) y^2 / 2} dy + \int x_0 e^{-\beta u''(x_0) y^2 / 2} dy}{\int e^{-\beta u''(x_0) y^2 / 2} dy}\end{aligned}$$

en  $y e^{-\beta u''(x_0) y^2 / 2}$  is een even functie in  $y$ , dus omdat  $y$  van  $-\infty$  naar  $+\infty$  loopt is de eerste integraal in de teller 0. Verder is dus

$$\begin{aligned}\langle x \rangle &= \frac{x_0 \int e^{-\beta u''(x_0) y^2 / 2} dy}{\int e^{-\beta u''(x_0) y^2 / 2} dy} \\ &= x_0.\end{aligned}$$