

Examen kwantum 10-06-2025

Een minderjarige met een soon to be identiteitscrisis

Bing chilling kwantum go brrr

1 Vragen

1) Mondelinge vragen (4 punten)

- Kan je twee observabelen met oneindige preciese tegelijk meten?
- Hoe bepaal je de kans om een bepaalde waarde van een observabele te meten?
- Als je een observabele A meet en korte tijd daarna opnieuw A meet, kan je dan een andere waarde meten?
- Stel dat A en B observabelen zijn die commuteren. Stel dat je eerst A meet, dan direct B en daarna opnieuw meteen A . Is de toestand na de eerste meting van A hetzelfde als na de tweede meting van A ?

2) Commutator berekenen (2 punten)

We definiëren de positie en momentum operatoren in de radiale richting door

$$\hat{r}\psi(r) = r\psi(r)$$
$$\hat{p}_r\psi(r) = -i\hbar \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi(r))}{\partial r}$$

Bepaal de commutator van $\hat{r}$ en $\hat{p}_r$ en bepaal hun onzekerheidsrelatie.

3) SHO grinden (4 punten)

We noemen een eigentoestand $|\alpha\rangle$ van de ladder operator $\hat{a}_-$ een coherente toestand, deze voldoet aan $\hat{a}_-|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ met $\alpha \in \mathbb{C}$.¹

a) Bepaal $\langle \hat{H} \rangle$, $\langle \hat{x} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, $\langle \hat{x}^2 \rangle$ en $\langle \hat{p}^2 \rangle$.

b) Bespreek de Heisenberg onzekerheidsrelatie in coherente toestanden.

¹De eigenschappen van de ladderoperatoren waren hier ook gegeven, maar daar ben ik te lui voor. Het belangrijkste dat gegeven was is: $[\hat{a}_-, \hat{a}_+] = 1$.

4) Pariteit dingen ofzo, idk man (4 punten)

Beschouw de 1D simpele harmonische oscillator, waar we twee identieke fermionen met spin $\frac{1}{2}$ in plaatsen. De energien zijn $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ en de bijbehorende golf functies $|\psi_n\rangle$. Deze transformeren onder de pariteitsoperator door $\psi_n(-x) = (-1)^n \psi_n(x)$.

a) Veronderstel dat je deeltjes in ruimtelijke toestanden $\psi_n(x)$ en $\psi_m(x)$ zitten. Bepaal de mogelijke **totale** golf functies (d.w.z. de spin en ruimtelijke golf functies samen) van de twee deeltjes samen.

b) Beschouw de perturbatie $V(x_1, x_2) = \lambda(x_1^2 + x_2^2)f(t)$. Toon aan dat V invariant is onder de pariteitsoperator.

c) Welke toestanden kunnen bereikt worden uit de grondtoestand $\psi_0(x)$ door V te behandelen met eerste orde perturbatietheorie.

d) Beschouw de perturbatie $V(x_1, x_2) = \lambda(x_1^2 - x_2^2)f(t)$. Beargumenteer met een symmetrie argument dat deze perturbatie niet voor transities kan zorgen vertrekkende uit een correct geantisymmetriseerde twee-fermiontoestand. Hier-voor kan de particle exchange operator $\hat{P}\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$ van pas komen.

5) Goofy spin shit (4 punten)

a) Beschouw een spin één deeltje dat op een bol met straal R beweegt, met hamiltoniaan $H = \frac{\hat{L}^2}{2mR^2} + V(r, \phi, \theta, t)$. Voor een potentiaal $V = \frac{\mu_B}{\hbar} B_z \hat{L}_z$, bepaal op eerste orde in B_z de correcties in de energie bij de $l = 0$ en $l = 1$ toestanden. Gegeven is dat in de basis $\{|l = 1, m_z = 1, 0, -1\rangle\}$ de angulair moment operatoren van een deeltje met $l = 1$ gegeven zijn door

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad L_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Doe hetzelfde voor de potentiaal $V = \frac{\mu_B}{\hbar} B_0(\hat{L}_x + \hat{L}_y)$, opnieuw op eerste orde in B_0 .

c) Voor een elektrisch veld, met potentiaal $V = -e\epsilon\hat{r}$, beargumenteer op basis van de hieronder gegeven selectieregels² of de $l = 0$ en $l = 1$ toestanden energie correcties hebben tot op eerste orde in ϵ . Je moet hier niets berekenen, gewoon

²Merk op dat wat ik hier het opgeschreven heel goed fout kan zijn. Echter zijn de eigenschappen van de selectieregels die je effectief nodig hebt wel correct, dus je kan wel correct argumenteren. Schrijf deze dus zeker niet op je formularium, het kan goed zijn dat ze niet kloppen.

een kwalitatieve uitleg geven.

$$\begin{aligned}\langle l \ m | \hat{x} | l' \ m' \rangle &\sim \delta_{m,m' \pm 1} \delta_{l,l' \pm 1} \\ \langle l \ m | \hat{y} | l' \ m' \rangle &\sim \delta_{m,m' \pm 1} \delta_{l,l' \pm 1} \\ \langle l \ m | \hat{z} | l' \ m' \rangle &\sim \delta_{m,m'} \delta_{l,l' \pm 1}\end{aligned}$$

2 Oplossingen van de auteur

Vraag 1

- Ja, indien ze commuteren. Anders niet.
- De norm in het kwadraat van de projectie op de bijbehorende eigentoes-
tand.
- Ja, bekijk bv spin in de x richting in een magneetveld in de z richting. Als
je eerst positieve spin meet en dan kort wacht en dan opnieuw meet kan
bijvoorbeeld een voldoende sterk magneetveld er voor zorgen dat je met
100% kan negatieve spin meet.
- Neen, ontarding pakt je hier in je reet. Bekijk bv het waterstof atoom
waarbij je eerst energie en dan L^2 meet. Na de eerste meting heb je collapse
naar een golffunctie met allemaal dezelfde energie, dan naar zelfde l wat
niet noodzakelijk opnieuw dezelfde toestand zal zijn.

Vraag 2

Pakt een random testfunctie $\psi(r)$. We vinden nu

$$\begin{aligned} [\hat{r}, \hat{p}_r]\psi(r) &= -i\hbar \frac{\partial(r\psi(r))}{\partial r} + i\hbar \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial r} r\psi(r) + r \frac{\partial(r\psi(r))}{\partial r} \right) \\ &= i\hbar \psi(r). \end{aligned}$$

Dus is $[\hat{r}, \hat{p}_r] = i\hbar$, zodat de onzekerheidsrelatie $\sigma_{\hat{r}}\sigma_{\hat{p}_r} \geq \frac{\hbar}{2}$ leest.

Vraag 3

a)³ We vinden

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle &= \langle \alpha | H | \alpha \rangle \\ &= \langle \alpha | \hbar\omega \left(\hat{a}_+ \hat{a}_- + \frac{1}{2} \right) | \alpha \rangle \\ &= \hbar\omega \left(\langle \hat{a}_- \alpha | \hat{a}_- \alpha \rangle + \frac{1}{2} \right) \\ &= \hbar\omega \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{x} \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \langle \alpha | (\hat{a}_+ + \hat{a}_-) | \alpha \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\bar{\alpha} + \alpha) \end{aligned}$$

³Dit uitschrijven is niet leuk voor mij, wees blij dat ik vandaag zin heb om lief te zijn.

$$\begin{aligned}\langle \hat{p} \rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \langle \alpha | (\hat{a}_+ - \hat{a}_-) | \alpha \rangle \\ &= i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\bar{\alpha} - \alpha).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{x}^2 \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle \alpha | (\hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^2 + \hat{a}_+ \hat{a}_- + \hat{a}_- \hat{a}_+) | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega} (\bar{\alpha}^2 + \alpha^2 + 2|\alpha|^2 + 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{p}^2 \rangle &= -\frac{\hbar m\omega}{2} \langle \alpha | (\hat{a}_+^2 + \hat{a}_-^2 - \hat{a}_+ \hat{a}_- - \hat{a}_- \hat{a}_+) | \alpha \rangle \\ &= \frac{\hbar m\omega}{2} (\bar{\alpha}^2 + \alpha^2 - 2|\alpha|^2 - 1).\end{aligned}$$

b) We vinden $\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ en $\sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$, zodat $\sigma_x^2 \sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4}$. In coherente toestanden bereiken we dus de Heisenberg onzekerheid.

Vraag 4

a) Bij deze vraag was het voldoende gewoon de golffuncties te geven, Ruben moest niet echt een redenering hebben waarom het de enige waren. We moeten antisymmetrie hebben, dus vinden we twee mogelijkheden:

$$\Psi(x_1, x_2) = (\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) + \psi_n(x_2)\psi_m(x_1))\chi_{s=0}$$

waarbij we met $\chi_{s=0}$ de spin golffunctie van de singlet configuratie bedoelen. In het geval dat $n \neq m$ kunnen we ook een antisymmetrische ruimtelijke golf-functie schrijven, en dan vinden we

$$\Psi(x_1, x_2) = (\psi_n(x_1)\psi_m(x_2) - \psi_n(x_2)\psi_m(x_1))\chi_{s=1}$$

waarbij we met $\chi_{s=1}$ een willekeurige spin golffunctie in de triplet configuratie bedoelen (deze configuratie heeft immers drie dimensies, dus hebben we veel mogelijke opties).

b) We moeten aantonen dat $\Pi^\dagger V \Pi = V$. We weten uit de cursus dat we evengoed kunnen aantonen dat V commuteert met de pariteitsoperator. Dit is weer eenvoudig rekenwerk, met $\psi(x_1, x_2)$ een testfunctie:

$$[V, \Pi]f(x_1, x_2) = \lambda(x_1^2 + x_2^2)f(x_1, x_2) - \lambda((-x_1)^2 + (-x_2)^2)f(-x_1, -x_2) = 0.$$

c) Merk op dat we zowiezo enkel even toestanden kunnen hopen te bereiken, immers is $\langle \psi_n | V | \psi_0 \rangle = (-1)^n \langle \Pi \psi_n | V | \Pi \psi_0 \rangle = (-1)^n \langle \psi_n | \Pi^\dagger V \Pi | \psi_0 \rangle = (-1)^n \langle \psi_n | V | \psi_0 \rangle$ want V is invariant onder pariteit. Dus als n oneven is zegt de gouden regel van Fermi ons dat er geen transities mogelijk zijn.

Als we nu gaan kijken naar de matrix elementen kunnen we ook inzien dat we nooit hoger dan de tweede geëxciteerde toestand zullen geraken, waardoor enkel de tweede geëxciteerde toestand bereikbaar is uit de grondtoestand.

d) Merk op dat voor een antisymmetrische toestand $|\psi_i\rangle$ zal gelden dat $\hat{P}V\hat{P}|\psi_i\rangle = -V|\psi_i\rangle$, zodat $\langle\psi_f|V|\psi_i\rangle = \langle\hat{P}\psi_f|V|\hat{P}\psi_i\rangle = \langle\psi_f|\hat{P}V\hat{P}|\psi_i\rangle = -\langle\psi_f|V|\psi_i\rangle$, zodat de gouden regel van Fermi ons geeft wat we willen aantonen. (We gebruiken dat $\hat{P}^\dagger = \hat{P}$.)

Vraag 5

a) Voor $l = 0$ vinden we uiteraard geen eerste orde correctie, we moeten $\langle 0\ 0|\hat{L}_z|0\ 0\rangle$ bepalen en het toeval wilt dat dit 0 is. Voor $l = 1$ moeten we in principe degenerate perturbation theory doen, maar de matrix is al gediagonaliseerd, dus kunnen we de correcties gewoon aflezen, ze zijn 0 en $\pm\mu_B B_z$.

b) Voor $l = 0$ kunnen we nondegenerate perturbation theory doen, dus we vinden gewoon weer 0 als eerste orde correctie. Voor $l = 1$ moeten we degenerate perturbation theory gaan doen, want deze matrix is niet diagonaal. Schrijf V uit als matrix en bepaal de eigenwaarden⁶, deze zijn 0 en $\pm\sqrt{2}\mu_B B_0$. Dit zijn ook meteen de eerste orde correcties.

c) Ik ga heel eerlijk zijn, deze redenering is kinda sketchy, maar houdt nog wel steek. Voor $l = 0$ merken we op dat de selectieregels ons zeggen dat $\langle 0\ 0|\hat{e}|0\ 0\rangle = 0$ met $\hat{e}$ een operator uit $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ naar keuze. Gezien $\hat{r}$ een vorm van som-product-idk wat nog is van deze operatoren zal ook $\langle 0\ 0|\hat{r}|0\ 0\rangle = 0$, zodat we geen eerste orde correctie hebben. De selectieregels zeggen ons ook dat $\langle 1\ m|\hat{e}|1\ m'\rangle = 0$ voor alle relevante $\hat{e}, m, m'$, zodat in de deelruimte van $l = 1$ we opnieuw een nulmatrix vinden voor onze perturbatie Hamiltoniaan. De bijbehorende eigenwaarden (dewelke precies de eerste orde correcties zijn) zijn dus ook nul.

⁶Ik ga dit hier niet uitschrijven, zie het als een goede oefening voor de lezer :)