

Examen Kwantummechanica

De Grote MacHerbie
ridder onder koning Kintu* van Buganda, heerser over de Baganda
12 dagen minder dan 131 jaar nadat Buganda een protectoraat
werd

Mondeling deel [4pt]

4 ja/nee-vragen

- Door een meting stort de volledige golf functie in, en ben ik alle informatie die in de golf functie zat kwijt. Alle uitkomsten van metingen van andere grootheden zijn dan volledig random.
- Als ik een meting uitvoer van een bepaalde grootheid, en ik meet daarna direct opnieuw kom ik hetzelfde uit. Echter, na even wachten, kan ik iets anders uitkomen als ik de meting opnieuw doe.
- Je kan nooit tegelijk de grootte van het angulair momentum en zijn projectie op de y-as weten.
- Alle oplossingen van de Schrödingervergelijking zijn gekwantiseerd, daarom heet het kwantummechanica.

Vraag 2 [3pt]

Zij $\hat{Q}$ een operator, en q_n eigenwaarden hiervan, horend bij de eigenvectoren $|e_n\rangle$.

2a)

Toon aan dat $\hat{Q} = \sum_n q_n |e_n\rangle \langle e_n|$.

2b)

Definieer $\hat{O} = e^{\hat{Q}}$. Dan is $\hat{O} = \sum_n f(q_n) |e_n\rangle \langle e_n|$. Wat is $f(q_n)$?

Hint (gegeven op examen): gebruik een veeltermexpansie.

*Niet te verwarren met die andere Kintu, de eerste man op aarde.

Vraag 3

Beschouw de 1D harmonische oscillator. We beschouwen eigenfuncties hiervan.

3a)

Toon op basis van een symmetrieargument aan dat $\langle x \rangle$ en $\langle p \rangle$ beide nul zijn.

3b)

Argumenteer dat uit symmetrie niet noodzakelijk volgt dat $\langle x^2 \rangle$ en $\langle p^2 \rangle$ nul zijn.

3c)

Bereken nu $\langle x^2 \rangle$ en $\langle p^2 \rangle$. *Hint (gegeven op examen): bereken geen moeilijke integralen.*

3d)

Geef commentaar op het Heisenberg onzekerheidsprincipe. Wat is bijzonder aan $n = 0$.

Vraag 4, aka: wéér deze kutvraag [3pt]

Gegeven zijn twee heliumatomen met eenzelfde ruimtelijke golffunctie. Er is geweten dat helium-3 spin 1/2 heeft, en helium-4 spin 0 (kern + atomaire spin). Schrijf de totale golffunctie op voor:

- Twee helium-4 atomen
- Een helium-3 en een helium-3 atoom
- Twee helium-3 atomen

Vraag 5, aka: de beruchte vraag met een complex magneetveld en een niet-Hermitische Hamiltoniaan. [5pt]

Beschouw een waterstofatoom. We laten hierop een perturbatie (magneetveld) werken:

$$\hat{H}_I = \gamma \vec{B} \cdot \hat{\vec{L}}$$

5a)

Vind de energieshifts als het magnetveld in de z -richting ligt. Waarom moeten we hier geen rekening houden met ontarding?

Beschouw verder steeds het geval $n = 2, l = 1$

5b)

Schets nu de energieshifts voor het geval waar we het magnetveld in de x -richting laten liggen.

5c)

Beredeneer waarom een magnetveld van de vorm $\vec{B}(t) = B(t)e_z$ nooit overgangen van de vorm $|\psi_{nlm}\rangle \rightarrow |\psi_{nlm'}\rangle$ toelaat als $m \neq m'$.

5d)

Beschouw nu een magnetveld $\vec{B} = Be_z + B(t)(e_x + ie_y)^1$ Welke overgangen zijn toegelaten? Wat is de frequentie hiervan [sic]?²

5e)

Zal ik in het labo overgangen $|\psi_{nlm}\rangle \rightarrow |\psi_{nlm+2}\rangle$ echt nooit tegenkomen? Bespreek in het licht van eerste-orde-perturbatietheorie.

¹Kwatongen zullen beweren dat dit een hoax is, omdat een complex magnetveld niet bestaat. Deze kwatongen zijn duidelijk nog nooit om 4 na 6 in het Arenbergpark geweest.

²De lezer vraagt zijn ongetwijfeld af wat bedoeld wordt met frequentie. Dit is een uitstekende vraag.

Oplossingen

Als je hier bent geraakt in de opleiding ben je slim genoeg om kritisch te zijn over de accuraatheid van deze oplossingen.

Als niet, jouw probleem.

Mondeling: Ruben heeft mij 4/4 gegeven dus deze antwoorden mag je klakkeloos vertrouwen.

1) Nee, beschouw bijvoorbeeld een superpositie in het waterstofatoom, als je $L = 0$ meet zal dan ook $L_z = 0$, dus is het al zeker niet totaal random. Stel dat de toestand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_{100}\rangle + |\psi_{200}\rangle)$ is, zal het meten van L ook niets gedaan hebben.

2) Ja, beschouw bijvoorbeeld een elektron in een magneetveld volgens de z-richting. Je meet spin in de x-richting. Na een tijd kan het zijn dat je voor uw x-spin iets anders meet.

3) Jawel, ze commuteren

4) Neen, beschouw het vrije deeltje *Mondelinge bijvraag: Geef een spectrum dat deels continu, deels discreet is. Antwoord: een elektron in een magneetveld (zie een vorig examen van de ketterschool, of iets simpeler: de eindige potentiaalput.*

Vraag 2) a) gewoon wat sjoemelen en niet vergeten dat de identieke $Id = \sum_n q_n |e_n\rangle \langle e_n|$ is.

b) de functie f is de exponentiële. Je moet hiervoor in het bewijs gebruiken dat $(\sum_n q_n |e_n\rangle \langle e_n|)^k = \sum_n q_n^k |e_n\rangle \langle e_n|$. Dit kan per volledige inductie.

Vraag 3)

a) ge kunt zo die integraal opschrijven, en dan op het gedeelte kleiner dan nul de $x \rightarrow -x$ substitutie doen en dan valt het weg (of ge doet het met de pariteit-operator dat kan ook).

b) de vorige methode werkt daar niet

c) $\frac{\hbar}{2m\omega}(2n+1)$ en $\frac{\omega}{2}(2n+1)$

d) voor $n = 0$ wordt het minimum aan onzekerheid bereikt.

Vraag 4) Staat in een van de oefenzittingen, bij de derde heb je het $S = 0$ singlet nodig. Bij de helium-4 heb ik geen spinterm opgeschreven omdat, wel de dimensie van die deelruimte is 1 dus van de projectieve deelruimte die relevant is³, is ze 0, dus het boeit niet. Echter is dit gewoon een kutvraag die iedereen die wel zijn eigen geschrift kan lezen uit de oefenzitting had overgeschreven.⁴

Vraag 5)

a) energieshifts: $0, \pm \gamma B \hbar$. Wegens commutatie is het niet-ontaard (cf. good-states-theorem)

b) Je kan het niet-ontaard storingsrekenen doen of gewoon symmetrie yoinken en zeggen dat de energieshifts dezelfde zijn als in de x-as (iets dat de auteur

³Want je moet toch normaliseren dus kan je evengoed projectief kijken

⁴Kritische lezers merken op dat dit gewoon een hoop yap zonder conclusie is. Volledig terecht.

jammerlijk pas zag bij het herlezen)

c) Wederom wat yappen over commutatie.

d) Merk op dat 1) de highering-operator⁵ in de veranderlijke term staat, en 2) dat ding niet-hermitisch is en dus geen hamiltoniaan. Dat terzijde zijn de enige toegelaten overgangen van m naar $m + 1$. Je kan dan tijdsafhankelijke perturbatietheorie hierop gooien (smijt het constant magneetveld bij in uw OG Hamiltoniaan, dat maakt het eenvoudiger en lift uw degeneracy), om de kans uit te rekenen van de overgang. Je vindt dan zoiets van $P = |\int_0^t \gamma(t') \hbar e^{(iE't/\hbar)} dt'|^2$, waaruit ik dan besloot dat als je uw magneetveld drijft aan een frequentie van $E'/\hbar$ je resonantie hebt (met $E' = B\hbar\gamma$). Echter; geen idee wat met frequentie bedoeld wordt.

e) Jawel, in 2 stappen, maar daar houdt 1e-orde storingsrekening geen rekening mee. De kans hiervoor kan je ook expliciet opschrijven mocht je dat willen.

⁵Door mensen die beter Engels kunnen dan ik ook wel de raising-operator genoemd.