Examen kwantummechanica 21 juni 2019 (namiddag)

Theorie: Variatieprincipe (5pt)
Toon aan dat de verwachtingswaarde van de Hamiltoniaan in een willekeurige toestand stationair is t.o.v. de toestand als en slecht als die toestand een eigentoestand is van de Hamiltoniaan.

Theorie: Verwisselingsoperator (5pt)
Deeltjes komen voor in twee families, bosonen en fermionen. Toon aan waarom er juist twee zulke families zijn door te vertrekken van de verwisselingsoperator P_{12} en zijn eigenschappen, en door golffuncties te beschouwen als complexe functies die aan fysiche en wiskundige eigenschappen voldoen.

Oefening: Harmonische oscillator in twee dimensies (4pt)
Vertrek van de Hamiltoniaan H voor een (isotrope) harmonische oscillator in twee dimensies in cartesische coördinaten x en y. Zoek de operatoren A en B die samen een CSCO vormen (d.w.z dat er een unieke eigenbasis van H bestaat waarvan elk element éénduidig genummerd kan worden met een kwantumgetal van A en een kwantumgetal van B). Deze CSCO is echter niet uniek. Vind een andere CSCO door H uit te schrijven in poolcoördinaten. Tip: Maak telkens gebruik van een symmetrie. Noot: in poolcoördinaten werkt de Laplaciaan als volgt:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{1}$$

Oefening: Spin-baan koppeling (6pt)
Indien het elektron van een waterstofatoom een baanimpulsmoment heeft, dan ondervindt het een magnetisch veld afkomstig van de kern. Dit is een relativistisch effect. De Hamiltoniaan krijgt dan een extra term die als storing kan gezien worden. We vereenvoudigen deze term tot:

$$\mathrm{W}_{sb} = \alpha^2 \mathrm{E_I} \frac{\mathbf{L.S}}{\hbar} \tag{2}$$

met $\alpha \approx \frac{1}{137}$, $\mathrm{E_I}$. Pas nu de tijdsonafhankelijke (ontaarde) storingsrekening tot op de eerste orde toe om de correcties op de energie ΔE(n,l) van toestanden met l $>$ 0 te vinden. Doe dit concreet door de storing te diagonaliseren in de deelruimte van toestanden van het elektron met gegeven kwantumgetallen n = 2, l = 1 en s = $\frac{1}{2}$ in het ongestoorde waterstofatoom (met enkel de Coulomb-interactie). Met andere woorden, kies een nieuwe (nulde orde) basis in deze deelruimte die beter aangepast is aan de storing. Deze basis kan je vinden door de operator **L.S** te herschrijven in functie van het totale impulsmoment **J**, en de afzonderlijke componenten **L** en **S**. Wat is de dimensie van de deze deelruimte? Bereken de eerste-orde correcties ΔE voor alle toestanden van de nieuwe basis. Wat gebeurt er met de oorspronkelijke ontaarding van het energieniveau? Zijn onze resultaten exact?