

Examen Lineaire Algebra – Wiskunde & Fysica

Januari 2025

Modeloplossing en toelichting

De drie vragen van het examen hebben een gelijk gewicht in de totaalscore.

1 Vraag 1

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdimensionale reële vectorruimte en $L : V \rightarrow V$ een lineaire transformatie. Veronderstel dat de karakteristieke veelterm φ_L volledig ontbindt als een product van reële eerste-gradsfactoren. Veronderstel dat voor elke eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{R}$ van L de meetkundige multipliciteit $d(\lambda)$ gelijk is aan de algebraïsche multipliciteit $m(\lambda)$. Bewijs dat L diagonaliseerbaar is.

Toelichting

Deze vraag werd verbeterd op een totaal van 9 punten. Deze vraag komt overeen met één van de implicaties van Stelling 5.23 in het handboek. We verwachten de volgende elementen in een antwoord. De overeenkomstige letters staan aangegeven op de verbeterde kopijen.

- (a) (Op 2 punten) Omdat de karakteristieke veelterm φ_L volledig ontbindt als een product van reële eerstegraadsfactoren, kan je φ_L schrijven als

$$\varphi_L(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_k)^{m_k}$$

waarbij $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de verschillende eigenwaarden van L zijn met algebraïsche multipliciteit $m_1, \dots, m_k$. Omdat $d(\lambda_i) = m(\lambda_i) = m_i$, hebben de eigenruimten E_{λ_i} dimensie m_i en kunnen we een basis $\{v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i}\}$ voor E_{λ_i} kiezen. We beweren dat

$$\beta = \{v_{i,j} \mid 1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq m_i\}$$

een basis van V bestaande uit eigenvectoren van L is. Van zodra dit bewezen is, is de stelling bewezen. Per definitie is elke $v_{i,j}$ een eigenvector van L . We moeten dus alleen bewijzen dat β een basis van V is.

Opmerking. Je moet in je antwoord ergens expliciet gebruiken dat $d(\lambda) = m(\lambda)$ voor alle eigenwaarden λ . Anders verlies je bij (a) al zeker 1 punt.

- (b) (Op 1 punt) Je gebruikt correct en consistent de notatie met dubbele indices $v_{i,j}$ waarbij j loopt van 1 tot m_i .
- (c) (Op 2 punten) Je toont aan dat β een vrij deel is. Je veronderstelt dat een lineaire combinatie

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{i,j} v_{i,j} = 0$$

gelijk aan 0 is. Je moet dan bewijzen dat alle $\alpha_{i,j}$ gelijk aan 0 zijn. Je definieert $u_i = \sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{i,j} v_{i,j}$. Je bewijst (zie volgend punt (d)) dat alle u_i gelijk zijn aan 0. Dus is voor alle i ,

$$\sum_{j=1}^{m_i} \alpha_{i,j} v_{i,j} = 0.$$

Omdat voor elke i de vectoren $\{v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i}\}$ een basis voor E_{λ_i} zijn, zijn deze vectoren vrij en volgt dat alle $\alpha_{i,j} = 0$.

Opmerking. Je moet expliciet vermelden dat de vectoren $\{v_{i,1}, \dots, v_{i,m_i}\}$ vrij zijn; anders verlies je bij (c) al zeker 1 punt.

- (d) (Op 2 punten) Je bewijst nauwkeurig dat alle u_i gelijk zijn aan nul. Uit de definitie van u_i volgt dat $u_i \in E_{\lambda_i}$ en dat $\sum_{i=1}^k u_i = 0$. Omdat $u_i \in E_{\lambda_i}$ is ofwel $u_i = 0$, ofwel u_i een eigenvector met eigenwaarde λ_i . Als minstens één u_i verschilt van 0, bekomen we een som van eigenvectoren met verschillende eigenwaarden die gelijk is aan 0. Dat is onmogelijk omdat eigenvectoren met verschillende eigenwaarden lineair onafhankelijk zijn. Dus zijn alle u_i gelijk aan 0.

Opmerking. Je moet expliciet vermelden dat eigenvectoren met verschillende eigenwaarden lineair onafhankelijk zijn. Zo niet, krijg je geen punten voor (d). Nogal wat studenten zeggen eerst dat u_i sowieso een eigenvector is en besluiten vervolgens dat $u_i = 0$, wat een interne contradictie is. In dat geval verlies je bij (d) al zeker 1 punt.

- (e) (Op 2 punten) Je bewijst dat β voortbrengend is. Aangezien β vrij is, is het voldoende om te bewijzen dat het aantal elementen van β gelijk is aan de dimensie van V . Het aantal elementen van β is gelijk aan $m_1 + \dots + m_k$. Dit is per definitie gelijk aan de graad van φ_L . En de graad van een karakteristieke veelterm is gelijk aan de dimensie van de vectorruimte.

Opmerking. Het is bij (e) belangrijk om, zoals in de les benadrukt werd, het verband te leggen met de *graad van φ_L* en te zeggen dat die graad gelijk is aan de dimensie van V . Als je dit niet doet, verlies je bij (e) al zeker 1 punt.

Enkele studenten schrijven een eigen argument, waarin soms enkele correcte elementen staan. Op die kopijen staat de letter (f) gevolgd door een globale score.

Enkele studenten gingen ervan uit dat alle m_i gelijk zijn aan 1 (wat wil zeggen dat het spectrum enkelvoudig is). Ze gebruiken dan dat eigenvectoren met verschillende eigenwaarden lineair onafhankelijk zijn om tot diagonaliseerbaarheid te komen. Die studenten kregen 2 op 9 (in analogie met deel (d) van het volledige antwoord).

2 Vraag 2

Waar of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

- (a) Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een eindigdimensionale reële vectorruimte met deelruimten U_1 , U_2 en W zodanig dat $V = U_1 + U_2$. Dan bestaan er deelruimten $W_1 \subset U_1$ en $W_2 \subset U_2$ zodanig dat $W = W_1 + W_2$.

- (b) Zij $\langle \cdot, \cdot \rangle$ het standaard inproduct op $\mathbb{R}^n$. Als $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrices zijn en $\langle A \cdot X, Y \rangle = \langle B \cdot X, Y \rangle$ voor alle $X, Y \in \mathbb{R}^n$, dan is $A = B$.
- (c) Beschouw het standaard inproduct op $\mathbb{R}^n$. Veronderstel dat $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een matrix is en dat $\mathbb{R}^n$ een orthonormale basis van eigenvectoren van A heeft. Dan is A symmetrisch.

Modeloplossing

- (a) De uitspraak is niet waar. We geven dus een tegenvoorbeeld.

Neem $V = \mathbb{R}^2$ en $U_1 = \text{vct}\{(1, 0)\}$ en $U_2 = \text{vct}\{(0, 1)\}$. Dit zijn respectievelijk de x -as en de y -as. Neem ten slotte $W = \text{vct}\{(1, 1)\}$, de eerste bissectrice. Omdat $\{(1, 0), (0, 1)\}$ heel $\mathbb{R}^2$ voortbrengt, is $V = U_1 + U_2$. We moeten aantonen dat er geen deelruimten $W_1 \subset U_1$ en $W_2 \subset U_2$ bestaan zodanig dat $W = W_1 + W_2$. Stel dat dergelijke deelruimten wel bestaan. Dan zou $W_1 \subset U_1 \cap W$. Maar $U_1 \cap W = \{(0, 0)\}$ zodat $W_1 = \{(0, 0)\}$. Op dezelfde manier is $W_2 = \{(0, 0)\}$. Dan is ook $W = W_1 + W_2 = \{(0, 0)\}$, wat in contradictie is met $W = \text{vct}\{(1, 1)\}$.

- (b) De uitspraak is waar. We geven dus een bewijs.

Noteer met e_i de i -de standaardbasis kolomvector. Het standaard inproduct wordt gegeven door

$$\langle A \cdot e_i, e_j \rangle = \sum_{k=1}^n (A \cdot e_i)_k (e_j)_k.$$

In deze som is $(e_j)_k = 0$ als $k \neq j$ en $(e_j)_k = 1$ als $k = j$. Verder is $A \cdot e_i$ de i -de kolom van de matrix A , zodat $(A \cdot e_i)_k = A_{ki}$. We vinden dus dat $\langle A \cdot e_i, e_j \rangle = A_{ji}$. Als nu $\langle A \cdot X, Y \rangle = \langle B \cdot X, Y \rangle$ voor alle $X, Y \in \mathbb{R}^n$, geldt in het bijzonder dat

$$A_{ji} = \langle A \cdot e_i, e_j \rangle = \langle B \cdot e_i, e_j \rangle = B_{ji}$$

voor alle i en j . Dit betekent dat de matrices A en B gelijk zijn.

- (c) De uitspraak is waar. We geven dus een bewijs.

Zij $\{v_1, \dots, v_n\}$ een orthonormale basis van eigenvectoren van A met λ_i de eigenwaarde die hoort bij v_i . Dan geldt voor alle $i, j = 1, \dots, n$:

$$\langle A \cdot v_i, v_j \rangle = \langle \lambda_i v_i, v_j \rangle = \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} \lambda_i & \text{als } i = j, \\ 0 & \text{als } i \neq j, \end{cases}$$

en

$$\langle v_i, A \cdot v_j \rangle = \langle v_i, \lambda_j v_j \rangle = \lambda_j \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} \lambda_j & \text{als } i = j, \\ 0 & \text{als } i \neq j. \end{cases}$$

Wanneer $i = j$ is $\lambda_i = \lambda_j$. We vinden dus dat $\langle A \cdot v_i, v_j \rangle = \langle v_i, A \cdot v_j \rangle = \langle A^T \cdot v_i, v_j \rangle$ voor alle i en j .

Door lineaire combinaties van v_i en v_j te nemen, volgt dat $\langle A \cdot X, Y \rangle = \langle A^T \cdot X, Y \rangle$ voor alle $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Wegens (b), zal dus $A = A^T$. Dit betekent dat A symmetrisch is.

Toelichting

De hele vraag werd verbeterd op 9 punten, met 3 punten per deelvraag. Wanneer je zonder verdere uitleg “waar” of “niet waar” antwoordt, krijg je geen punten.

- (a)
 - Correct tegenvoorbeeld zonder bewijs: 1,5 punt.
 - Correct bewijs voor het tegenvoorbeeld: 1,5 punt.
 - Wanneer je alleen aantoont dat $W \subset U_1 + U_2 = V$, krijg je 0 punten.
- (b)
 - Een juist verband leggen tussen de elementen van de matrix en inproducten met de standaardbasis: 2 punten.
 - Conclusie trekken dat $A = B$: 1 punt.
 - Enkel schrijven dat de conclusie volgt omdat het voor alle X, Y geldt zonder uitleg: -1 punt.
 - Een zagezegd “tegenvoorbeeld” geven met specifiek gekozen X, Y : 0 punten.
- (c)
 - De gelijkheid $\langle A \cdot v_i, v_j \rangle = \langle v_i, A \cdot v_j \rangle$ aantonen voor een basis van eigenvectoren: 1 punt.
 - De gelijkheid $\langle A \cdot v, w \rangle = \langle v, A \cdot w \rangle$ afleiden voor willekeurige vectoren: 1 punt.
 - Uit het vorige punt correct afleiden dat A symmetrisch is: 1 punt. Hier mag eventueel het bewijs van vraag (b) gebruikt worden, als dit correct was.

3 Vraag 3

Zij $(\mathbb{C}, V, +)$ een eindigdimensionale complexe vectorruimte met $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ en $n \geq 1$. Zij $L : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding met karakteristieke veelterm φ_L .

- (a) Bewijs dat $\varphi_L(X) = X^n$ als en slechts als elke eigenwaarde van L gelijk aan 0 is.

Veronderstel voor de rest van deze opgave dat $\varphi_L(X) = X^n$.

- (b) Bewijs dat $\text{Ker } L \neq \{0\}$ en dat $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Im } L) \leq n - 1$.
- (c) Definieer $W = \text{Im } L$. Toon aan dat we de lineaire afbeelding L kunnen beperken tot een lineaire afbeelding $K : W \rightarrow W$.
- (d) Bewijs dat elke eigenwaarde van K gelijk aan 0 is.
- (e) Bewijs per inductie op n dat $\underbrace{L \circ L \circ \dots \circ L}_{n \text{ keer}} = 0$.

Modeloplossing

- (a) $\boxed{\Rightarrow}$ Stel dat $\varphi_L(X) = X^n$ en zij λ een eigenwaarde van L . Dan is λ een wortel van X^n , zodat $\lambda^n = 0$ en dus $\lambda = 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Wegens de hoofdstelling van de algebra kunnen we de veelterm $\varphi_L(X)$ volledig ontbinden als een product van eerstegraadsfactoren. Omdat de leidende coëfficiënt van φ_L gelijk aan 1 is, kunnen we $\varphi_L(X)$ dus schrijven als

$$\varphi_L(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_n) \quad \text{met } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}.$$

Elke λ_i is een nulpunt van $\varphi_L(X)$ en dus een eigenwaarde van L . Omdat alle eigenwaarden van L gelijk aan 0 zijn, zijn alle λ_i gelijk aan 0 en volgt dat $\varphi_L(X) = X^n$.

- (b) Uit (a) weten we dat 0 een eigenwaarde van L is. Er bestaat dus een $v \in V$ met $v \neq 0$ zodat $L(v) = 0 \cdot v = 0$. Dus is $v \in \ker L$ en is $\ker L \neq \{0\}$. Dan is $\dim \ker L \geq 1$. De dimensiestelling leert ons dat

$$\dim \operatorname{Im} L = n - \dim \ker L \leq n - 1.$$

- (c) Zij $v \in W$ willekeurig. Dan is $v \in V$ en dus is $L(v) \in \operatorname{Im} L = W$. Dus is de functie $K : W \rightarrow W : v \mapsto L(v)$ goed gedefinieerd. Omdat L lineair is, is ook K lineair.

- (d) Zij λ een eigenwaarde van K . Dan is er een $v \in W, v \neq 0$ met $K(v) = \lambda v$. Dan is ook $L(v) = \lambda v$, zodat λ een eigenwaarde van L . Uit (a) weten we dat alle eigenwaarden van L gelijk aan 0 zijn. Dus is $\lambda = 0$.

- (e) We zullen dit aantonen per inductie.

Inductiehypothese **IH(n)**: Voor elke vectorruimte V met $\dim V \leq n$ en lineaire afbeelding $L : V \rightarrow V$ met $\varphi_L(X) = X^{\dim V}$ is

$$\underbrace{L \circ \dots \circ L}_{n \text{ keer}} = 0.$$

Beginstap: Stel $n = 1$. Dan is $\dim V = 0$ of $\dim V = 1$. Als $\dim V = 0$, dan is $V = \{0\}$, zodat ook $L = 0$. Als $\dim V = 1$, dan volgt uit (b) dat $\dim \ker L \geq 1$ en dus is $\ker L = V$ en $L = 0$.

Inductiestap: Stel nu dat $n > 1$ en dat de inductiehypothese **IH**($n - 1$) geldt. We moeten **IH**(n) bewijzen. Omdat **IH**($n - 1$) geldt, volstaat het om het volgende te bewijzen: wanneer $\dim V = n$ en $L : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding is met $\varphi_L(X) = X^n$, dan is

$$\underbrace{L \circ \dots \circ L}_{n \text{ keer}} = 0.$$

Wanneer $L = 0$ is dit evident. Veronderstel dat $L \neq 0$. Definieer $W = \operatorname{Im} L$ en definieer $K : W \rightarrow W$ zoals in vraag (c). Uit vraag (d) weten we dat elke eigenwaarde van K gelijk is aan 0. Dan volgt uit (a) dat $\varphi_K(X) = X^{\dim W}$. Uit vraag (b) weten we dat $\dim W \leq n - 1$. Omdat de inductiehypothese **IH**($n - 1$) geldt, volgt dat

$$\underbrace{K \circ \dots \circ K}_{n-1 \text{ keer}} = 0.$$

Kies $v \in V$ willekeurig. Dan is $L(v) \in W$ zodat

$$\underbrace{L \circ \dots \circ L}_{n \text{ keer}}(v) = \underbrace{K \circ \dots \circ K}_{n-1 \text{ keer}}(L(v)) = 0.$$

Dus is $\underbrace{L \circ \dots \circ L}_{n \text{ keer}} = 0$.

We kunnen voor (e) ook het volgende *alternatieve bewijs* geven per eindige inductie.

(e') Zij V een vectorruimte V met $\dim_{\mathbb{C}} V = n$ en zij $L : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding waarvoor $\varphi_L(X) = X^n$.

We schrijven voor alle k met $1 \leq k \leq n$ de volgende inductiehypothese.

IH(k): Er geldt dat

$$\dim \operatorname{Im} \underbrace{L \circ \dots \circ L}_{k \text{ keer}} \leq n - k.$$

Beginstap: Stel dat $k = 1$. Uit (b) weten we dat $\dim \operatorname{Im} L \leq n - 1$.

Inductiestap: Stel dat $2 \leq k \leq n$ en veronderstel dat de inductiehypothese **IH(k-1)** geldt. Definieer $W_{k-1} := \operatorname{Im} \underbrace{L \circ \dots \circ L}_{k-1 \text{ keer}}$. Als $\dim W_{k-1} = 0$, dan is $\operatorname{Im} \underbrace{L \circ \dots \circ L}_{k \text{ keer}} = L(W_{k-1}) = \{0\}$,

wat dimensie $0 \leq n - k$ heeft. Stel vervolgens dat $W_{k-1} \neq 0$. We kunnen L beperken tot $K_{k-1} : W_{k-1} \rightarrow W_{k-1}$ want voor elke $w \in W_{k-1}$ is er een $v \in V$ zodat $\underbrace{L \circ \dots \circ L}_{k-1 \text{ keer}}(v) = w$, en

dus

$$L(w) = \underbrace{L \circ \dots \circ L}_{k \text{ keer}}(v) = \underbrace{L \circ \dots \circ L}_{k-1 \text{ keer}}(L(v)) \in W_{k-1}.$$

Net zoals in het bewijs van (d) is elke eigenwaarde van K_{k-1} gelijk aan 0. Aangezien

$$\operatorname{Im} \underbrace{L \circ \dots \circ L}_{k \text{ keer}} = \operatorname{Im} K_{k-1},$$

volgt uit (a) en (b) dat

$$\dim \underbrace{L \circ \dots \circ L}_{k \text{ keer}} = \dim \operatorname{Im} K_{k-1} \leq \dim W_{k-1} - 1.$$

Omdat de inductiehypothese **IH(k-1)** geldt, is $\dim W_{k-1} \leq n - (k - 1)$. We vinden dus dat

$$\dim \underbrace{L \circ \dots \circ L}_{k \text{ keer}} \leq n - (k - 1) - 1 = n - k,$$

zodat **IH(k)** geldt.

Wegens inductie geldt **IH(n)**. Dit betekent dat het beeld van $\underbrace{L \circ \dots \circ L}_{n \text{ keer}}$ de nulruimte is, zodat deze lineaire afbeelding gelijk aan 0 is.

Toelichting

Deze vraag staat op 11 punten. Hiervan gaan 6,5 punten naar (a), (b), (c) en (d). Deze eerste deelvragen zijn hints om de “echte” stelling in vraag (e) te bewijzen op 4,5 punten.

Algemeen. Velen proberen een basis te kiezen voor V om dan met de matrixvorm van L te kunnen werken. Dit maakt de vraag doorgaans moeilijker en niet makkelijker. Mocht je toch echt met een basis willen werken, begin dat met een basis voor $\text{Im } L$ te kiezen en breid deze uit tot een basis voor V .

- (a) (Op 2 punten) De implicatie $\implies$ ging doorgaans goed. Voor de implicatie $\impliedby$ is het niet voldoende om te zeggen dat X^n de enige veelterm van graad n is waarvan alle nulpunten gelijk aan 0 zijn en waarvan de leidende coëfficiënt gelijk aan 1 is. Dat is immers niet zomaar evident en bijvoorbeeld fout wanneer we werken over $\mathbb{R}$. Zo is bijvoorbeeld $X^3 + X$ een veelterm waarvan alle reële nulpunten gelijk aan 0 zijn. Het is dus belangrijk om de hoofdstelling van de algebra direct of indirect te benoemen, door bijvoorbeeld te schrijven dat “ $\varphi_L(X)$ volledig ontbindt in lineaire factoren want we werken over $\mathbb{C}$.”

Een andere veelgemaakte fout is om te concluderen dat L , of de matrixvoorstelling van L , nul moet zijn. Dit klopt niet. Neem bijvoorbeeld de afbeelding voorgesteld door

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dan is $\varphi_A(X) = X^2$.

- (b) (Op 2 punten) Je verdient één punt door aan te tonen dat $\ker L \neq \{0\}$ en één punt door hieruit af te leiden dat $\dim \text{Im } L \leq n - 1$. Deze deelvraag is doorgaans goed beantwoord.
- (c) (Op 1 punt) De bedoeling van de vraag was te checken dat voor alle $w \in W : L(w) \in \text{Im } W$ zodat de beperking $K : W \rightarrow W : w \mapsto L(w)$ goed gedefinieerd is. Studenten die zorgvuldig hebben getoond dat K lineair is, hebben ook alle punten gekregen.

Een veelgemaakte fout is om $\ker L$ onnodig en foutief bij het antwoord te betrekken. Sommige studenten gebruiken $V \setminus \ker L$, maar dat is geen vectorruimte en dus al zeker niet gelijk aan W . En in het algemeen is $V \neq \ker L \oplus W$, waar de directe som als deelruimten van V te interpreteren is.

- (d) (Op 1,5 punt) Sommigen probeerden aan te tonen dat de veelterm φ_K een deler is van de veelterm φ_L , waaruit meteen zou volgen dat $\varphi_K(X) = X^{\dim K}$. Het is inderdaad waar dat als K een beperking is van L dan φ_K een deler is van φ_L , maar dit is niet zo makkelijk te bewijzen.

In plaats daarvan is het efficiënter om aan te tonen dat elke eigenvector van K een eigenvector van L is met dezelfde eigenwaarde. Dit moet weliswaar getoond worden; enkel beweren dat elke eigenwaarde van K ook een eigenwaarde van L is zonder verdere uitleg is niet voldoende.

- (e) (Op 4,5 punten) Er viel 1 punt te verzamelen voor een goede inductiehypothese, 1 punt voor een goede beginstap en 2,5 punten voor een goede inductiestap.

Denk bij een dergelijke vraag altijd goed na over wat precies de inductiehypothese is. In dit geval kan dat bijvoorbeeld zijn

IH(n): Voor elke vectorruimte V met $\dim V \leq n$ en lineaire afbeelding $L : V \rightarrow V$ met $\varphi_L(X) = X^{\dim V}$ is $\underbrace{L \circ \dots \circ L}_{n \text{ keer}} = 0$.

Stel nu dat we de inductiestap proberen aan te tonen en hiervoor een vectorruimte V van dimensie $n + 1$ nemen. Dan mag je **niet** de inductiehypothese gebruiken om te zeggen dat $\underbrace{L \circ \dots \circ L}_{n \text{ keer}} = 0$. Het is immers zo dat L een lineaire afbeelding tussen ruimtes van dimensie $n + 1$ is, en daar zegt de inductiehypothese niets over.

Bij het bewijs van de beginstap is het niet voldoende te vermelden dat elke eigenvector 0 is en daarom $L = 0$. Dit klopt enkel in het speciale geval dat $\dim V = 1$ en je moet kunnen uitleggen waarom.

Sommigen hadden een correct vermoeden dat na elke samenstelling met L de dimensie van het beeld zal dalen.

Een mogelijke alternatieve inductiehypothese (voor eindige inductie) gebaseerd op dit idee gaat dan als volgt.

IH(k): Zij $L : V \rightarrow V$ met $\dim V = n$ en $k \leq n$. Dan is

$$\dim \operatorname{Im} \underbrace{L \circ \dots \circ L}_{k \text{ keer}} \leq n - k.$$

Om deze methode tot een goed einde te brengen kan je niet zomaar de vorige deelvragen gebruiken, maar zal je moeten aantonen dat de conclusies van (c) en (d) ook gelden als we $W = \operatorname{Im} \underbrace{L \circ \dots \circ L}_{k \text{ keer}}$ nemen.