

Examen Lineaire algebra - januari 2024

1 Vraag 1

Zij $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ een symmetrische matrix die een eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{R}$ heeft met eigenruimte E_λ . Definieer nu L_A een lineaire transformatie over $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ zodat $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : L_A(X) = AX$.

1. Geef de definitie van E_λ .
2. Bewijs dat $L_A(E_\lambda^\perp) \subset E_\lambda^\perp$.
3. Bewijs voor elke λ dat $d(\lambda) = m(\lambda)$.

2 Vraag 2

Waar of fout, bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

1. Als V en W eindigdimensionale vectorruimtes zijn en $L : V \rightarrow W$ is een surjectieve lineaire afbeelding, dan is $\dim(V) \geq \dim(W)$.
2. Voor alle $A \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ en alle $B \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ geldt dat AB niet inverteerbaar is.
3. Voor alle n geldt dat de som van twee diagonaliseerbare $n \times n$ -matrices ook diagonaliseerbaar is.

3 Vraag 3

Stel $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is een matrix met eigenwaarde λ , en $P \in \mathbb{R}[X]$ is een veelterm van de vorm $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$. Beschouw $P(A) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ als de matrix die je krijgt als je A “invult” in $P(X)$ (dus $P(A) = a_0 + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_kA^k$).

1. Bewijs voor alle eigenwaarden λ van A dat $P(\lambda)$ een eigenwaarde van $P(A)$ is.
2. Bewijs dat als A diagonaliseerbaar is, $P(A)$ dat ook is.
3. Bepaal voor alle diagonaliseerbare matrices $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en voor alle $P \in \mathbb{R}[X]$ het spectrum van $P(A)$ in functie van het spectrum van A en van P .
4. Bewijs dat voor alle $P(A) \in \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ geldt dat als $P(A)$ diagonaliseerbaar is, A dat ook is, en vind een $P \in \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ waarvoor dit niet geldt.