Meetkunde I

23 januari 2015

Mondeling gedeelte - 1u30min - Gesloten boek

$\boxed{\mathbf{1}}$ a) Geef de definitie van het begrip spiegeling in $\mathbb{E}^n$.

b) Bewijs dat elke oriëntatieomkerende isometrie van $\mathbb{E}^2$ een schuifspiegeling is.

c) Zij l en l' twee evenwijdige rechten in $\mathbb{E}^2$. Beschouw de spiegelingen R_l en $R_{l'}$ in de respectievelijke rechten. Bewijs dat de samenstelling van de twee spiegelingen een translatie is.

$\boxed{\mathbf{2}}$ a) Wat is de intrinsieke vergelijking van een booglengtegeparametriseerde vlakke kromme? Hoe kan men de uitdrukking van de kromme uit de intrinsieke vergelijking halen?

b) Wat is de rotatieindex van een gesloten booglengtegeparametriseerde kromme? Hoe haalt men de rotatieindex uit de kromming van een kromme? Toon aan.

c) Stel dat α en β congruente booglengtegeparametriseerde gesloten vlakke krommen zijn. Bewijs dat voor een isometrie F van $\mathbb{E}^2$ het verband tussen de rotatieindices van de krommen gegeven wordt door

$$i_\alpha = \varepsilon i_\beta$$

met $\varepsilon = \pm 1$.

Schriftelijk gedeelte - 2u30min - Open boek

$\boxed{\mathbf{1}}$ Bewijs de stelling van Desargues op analytische wijze.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Beschouw in $\mathbb{E}^3$ de drie paarsgewijs orthogonale rechten l_1, l_2 en l_3.

a) Bewijs dat er precies acht isometrieën bestaan zodat $F(l_1) = l_2$, $F(l_2) = l_3$ en $F(l_3) = l_1$ en zodat $l_1 \cap l_2 \cap l_3$ een vast punt is.

b) Bewijs dat vier van de acht isometrieën schroefspiegelingen zijn, en de andere vier draaispiegelingen zijn.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Zij $\beta : I \subseteq R \to \mathbb{E}^3 : s \mapsto \beta(s)$ een booglengtegeparametriseerde kromme gedefinieerd op de sfeer met straal r. Definieer de kromme α als volgt :

$$\alpha(t) = \int_a^t \beta(s) \times \beta'(s) ds$$

Bewijs dat α snelheid r heeft en torsie $-r^2$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Beschouw een patch $x : U \to \mathbb{E}^3$. Fixeer een punt $p \in x(U)$. We noemen een vector v met $||v|| = 1$ een asymptotische richting van $x(U)$ in p als de normaalkrommig van $x(U)$ in p in de richting van v gelijk is aan 0.

Bewijs de volgende drie equivalenties:
- $K(p) > 0$ als en slechts als $x(U)$ precies twee asymptotische richtingen heeft.
- $K(p) = 0$ als en slechts als $x(U)$ één of oneindig veel asymptotische richtingen heeft.
- $K(p) < 0$ als en slechts als $x(U)$ geen asymptotische richtingen heeft.