

Vragen examen BnR 2024-2025

Goranje en Foempeking

1 Vraag 1

Vraag (a). Zij X en Y twee verzamelingen en $f : X \rightarrow Y$ een functie. Toon aan dat de volgende implicatie niet altijd geldt:

$$\forall B \in P(Y) : \forall C \in P(Y) : f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = \emptyset \implies B \cap C = \emptyset.$$

Vraag (b). Toon aan dat

$$\forall B \in P(Y) : \forall C \in P(Y) : f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = \emptyset \implies B \cap C = \emptyset$$

geldt als en slechts als f surjectief is.

2 Vraag 2

Vraag (a). Zij X en Y twee verzamelingen en $f : X \rightarrow Y$ een functie. Stel dat S een relatie is op Y , definieer dan de relatie R op X door

$$R = \{(x_1, x_2) \in X^2 \mid (f(x_1), f(x_2)) \in S\}.$$

Als S een equivalentierelatie is op Y is R dan een equivalentierelatie op X ? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Vraag (b). Zij X een aftelbaar oneindige verzameling, hoeveel equivalentierelaties zijn er op X ? Eindig, aftelbaar oneindig of overaftelbaar. Motiveer je antwoord.

3 Vraag 3

Vraag (a). Zij A en B twee begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}$. Definieer dan

$$A - B = \{a - b \mid a \in A : b \in B\}.$$

Bewijs dat $A - B$ begrensd is en dat er geldt dat

$$\sup(A - B) = \sup A - \inf B.$$

Vraag (b). Stel dat A en B twee gesloten deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ zijn. Bewijs dat ook $A - B$ gesloten is.

4 Vraag 4

Vraag (a). Geef de ε - n_0 definitie van een convergente rij.

Vraag (b). Bewijs dat de rij $(a_n)_n$ gedefinieerd door $a_0 = 0$ en voor alle $n \geq 1$ door

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2 + 2025n}}{n}$$

convergent is.

5 Vraag 5

Vraag (Banger). Zij $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ een injectie en zij $(x_n)_n$ een begrensde rij. Bewijs dat de rij $(y_n)_n$, gedefinieerd door

$$y_n = x_{\sigma(n)},$$

ook begrensd is en dat

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Belangrijke opmerking: σ is niet perse stijgend en dus is $(y_n)_n$ niet perse een deelrij van $(x_n)_n$!